Math. P.
24

Math P. 24

Mathesis pura. Arithmetica
Systemata & methodi 206.

Kurze
Anleitung
zur
Rechenkunst

herausgegeben
von
Anton Barth
der Gesellschaft Jesu Priester, und öffentlichen ord. Lehrer der Mathematik.

R

Zum Gebrauche der untern Schulen.

München, 1772.
In Verlag bey Johann Nepomuck Fritz,
Churfürstl. Akademisch- und burgerlichen Buchhändler
nächst dem schönen Thurme.

Bayerische Staatsbibliothek München

Anleitung zur Rechenkunst.

Imprimatur.

Sig. München in dem Churfürstl. Hochlöbl. Bücher-Censur-Collegio den 12. Jun. 1772.

Wilhelm Wodiczka
Secret.

Vorrede.

Nichts wäre für das gemeine Beste erwünschlicher, als daß schon die Jugend jene Hochschätzung der Rechenkunst besäß, welche das sie vor Jahren nicht gehabt, eine Menge auch sonst geschickt und gelehrter Männer erst alsdann zu bedauern angefangen, da es ihnen schon, Alters und Geschäfte halber, an der Geduld sowohl, als an der Zeit gebrach, sie zu erlernen Nein, die ausnehmende Vortheile, die unzahlbare Nutz=

barkeiten, ja die fast für alle Stände unumgängliche Nothwendigkeit dieser Wissenschaft zeiget sich täglich in unserm gemeinschaftlichen Leben viel zu deutlich, als daß ich hier auch nur ein Wort davon sagen sollte.

Daß, um in der Philosophie und Mathematick nur schlechthin fortzukommen, die Rechenkunst unentbehrlich sey, ist so ein Satz, über welchen niemand einen Beweis fordert, der von der Philosophie und Mathematick ein bischen mehr, als ihre Nämen, kennet. Sie wird darum schon manche Jahre her unsrer studirenden Jugend noch in den untern Schulen von geübten Lehrern sorgfältig beygebracht. Aber um wie viel glücklicher würden diese in ihren Bemühungen seyn, wenn bey der Jugend die Hochachtung von der Rechenkunst, und der Eifer in den Privatübungen so groß, als ihre (der Lehrer) unverdrossene Arbeit wäre. Wahr ists: bey vielen Knaben ist der Fortgang

gang in dieser Wissenschaft sehr gut; sie haben uns offentliche Proben ihres Fleißes geliefert, und wir sahen sogar mit Verwunderung in offentlichen Schulübungen junge Albgebraisten auftretten, die uns auch die schwereren Aufgaben aus diesem Fache mit grösserer Fertigkeit erörtert, als wir es von diesem Alter erwartet hätten. Allein in einer grossen Anzahl der Schüler bleiben doch immer die mehresten in dieser Wissenschaft zurück. Warum? Ich forschte der Ursach dessen schon eine längere Zeit nach, und vielleicht hatte ich das Glück, sie zu entdecken. Vielleicht hat die immerwährende Abwechselung der Lehrart den Schülern ihre Arbeit bisher verdrüßlich gemacht. Vielleicht war es den Lehrern selbst beschwerlich, daß sie eben manchmal so genau nicht wissen konnten, wo sie eigentlich anfangen sollten, und wo es das Jahr vorher ihr Vorfahrer gelassen. Kurz: vielleicht hat es den Lehrern und den Schülern an einem be-

quemen Schulbuch gemangelt, daß verschiedene Lehrer verschiedener Auctoren sich bedienen mußten, nach welchen jeder seine Lehrart und Ordnung eingerichtet, und die Schüler, weil sie das Buch nicht hatten, zu Hause in ihren Privatübungen nicht recht fortkommen konnten.

Ich entschloß mich dahero ihnen ein Büchgen zu liefern, welches eben nicht zu kurz, aber auch nicht zu weitläufig wäre. Was an der Weitläufigkeit mangelt, wird die mündliche Erklärung ersetzen.

Meine Absicht ist hier nicht, aus Kindern und Knaben auf einmal, so zu sagen, vollkommne Rechenmeister zu bilden, nein: aber der studirenden Jugend eine Lust und Hochachtung für eine Wissenschaft beyzubringen, die ihnen nach wenig Jahren so nothwendig als nützlich seyn wird: ihnen die ersten Beschwerniße schon in den untern Schulen unvermerkt aus dem Wege zu räumen,

men, die den mehresten Anfängern der Physik und Mathematik, ich weiß nicht, so schreckbar oder verdrüßlich, und eben darum unüberwindlich vorkommen: endlich denen, die ohnehin schon Lust und Eifer genug zu dieser so schönen Wissenschaft haben, ihre Arbeit, die ihnen etwan der Mangel eines Buches bisher verdoppelt, leichter und angenehmer zu machen, das ist meine Absicht.

Ich habe darum auch nur **die ersten Gründe** der Arithmetick in diesem Werkgen angebracht. Hat ein oder der andere Schüler so viel Herz und Witz, sich schon vor der Zeit an die Algebra zu wagen, wird er davon eine deutliche Abhandlung, und alles, was er, sie zu erlernen, nöthig hat, am Anfang eines andern Werkes finden, das ich unlängst **von der Anwendung der feinern Mathematik auf die Physik und Artillerie** geschrieben. Wenn aber insgemein, und überhaupt von der Jugend die Rede ist, ob sie schon weit mehr Fähig-

 keit

keit besitzt, als man vielleicht glaubt, muß man doch dieß Alter nicht überladen, und ein **öffentlicher Lehrer** muß seine Lehrart jederzeit nach der Fähigkeit nicht nur der **besten**, sondern auch seiner **mittelmäßigen** Schüler einrichten, wenn er nicht will, daß seine Arbeit **bey den mehrsten** verlohren sey.

Vier Jahre aber werden ja hinlänglich seyn, auch den mittelmäßigen alles das von der Arithmetik beyzubringen, was in diesen wenigen Blättern enthalten ist.

Ich bestimme also die 3. erstern Abschnitte meines Werkes für **die erste Classe.**

In **der zweyten** sollen eben diese 3. wiederholet, und die Erklärung **des vierten, von den Zahlen, die nicht von gleicher Art sind,** beygesetzt werden.

In der **dritten Claß** kann der **fünfte** und **sechste** Abschnitt, wo **von den**

Fra-

Fractionen, und von Ausziehung der Quadrat und Cubikwurzel gehandelt wird, den Schülern nimmer so schwer vorkommen, nachdem sie sich alles vorgehende durch zweyjährige Uebung wohl bekannt gemacht haben. Es sollen darum auch die ersten vier Abschnitte vom Anfang in dieser Classe kurz durchgegangen, und nur etwan durch an die Schüler angebrachte Fragen und kurze Aufgaben vor weiterer Erklärung des **fünften** Abschnittes wiederholet werden; eine Arbeit, die sich in ein oder dem andern Monathe, ohne sich zu übereilen, vollenden lässet.

In der **vierten Classe** endlich, nachdem wieder die ersten 6. Abschnitte durch Fragen und Aufgaben nur kurz, und, weil schon eine 3. jährige Uebung der Schüler vorhergegangen, ohne sich länger dabey aufzuhalten, wiederholet worden, sollen die Proportionen aus dem **Siebenden,** und die sogenannte **Regel Detri,** die nur eine

Anwendung der Proportionen ist; **aus dem Achten** Abschnitte erkläret werden.

Und weil man ohnehin den Schülern dieser vierten Classe die **Elemente der mathematischen Geographie** beyzubringen hat, können ja die Arithmetischen Uebungen, wo nicht alle, doch die mehresten, aus dieser schönen und angenehmen Wissenschaft hergenommen werden. Gewiß muß es einem Schüler zum Vergnügen seyn, wenn man ihn die Früchte seiner bisher auf die Arithmetick angewandten Mühe und Arbeit zu verkosten giebt, die er in den Geographischen Aufgaben mit Augen sieht.

Doch ich hätte alle diese Erinnerungen wohl ersparen können, da ich mich des unverdrossenen Eifers sowohl, als der geübtesten Geschicklichkeit aller derjenigen sicher zu vertrösten habe, denen die Jugend in unserr Schulen anvertrauet wird.

Vielleicht kömmt aber auch dieses Büchgen Privatlehrern in die Hände, die ich gern wollte, daß sie in ihren Unterweisungen eben das zu Hause beobachteten, was ich für die öffentlichen Schulen erinneret. Freylich kann ein solcher Lehrmeister, der sich auf seinem Studierzimmer nur nach **dem Kopf und guten Talenten etwa eines einzelen jungen Herrn** zu richten hat, leicht weiter kommen, als man insgemein in den öffentlichen Schulen kömmt, wo der Lehrer 60, 70 und noch mehr mit Himmelweit unterschiednen Talenten begabte Jünglinge vor sich sieht, von denen er keinen verabsäumen soll, der sich nicht selbst durch seine Hinläßigkeit versäumt.

Ob es aber so leicht sey, geschickte und taugliche Privatlehrer zu erfragen, und ob vielleicht unter 100 nur 10 zu finden, die ihren jungen Herrn so weit gebracht, als er in den öffentlichen Schulen würde gekommen

kommen seyn, ist eine Frage, die uns die Erfahrung beantwortet. Daß der Vorzugseifer, der in den Schulen herrschet, zum Fortgang der Schüler nicht wenig beytrage, ist so gewiß, als bekannt es ist, wie matt und schlafend das Studiren auch bey den besten Talenten aussehe, wo diese lobwürdige Eifersucht abgehet.

Von der fernern Einrichtung meines Büchgens habe ich weiters nichts zu erinnern, als daß ich hin und wieder die Beweise nur unvermerkt, und so angebracht habe, wie ich glaubte, für das Alter, für das ich schrieb, hinlänglich zu seyn; besonders, weil ich eben diese Lehrsätze, **für meine Schüler**, in meiner Abhandlung von der Algebra schon ausdrücklicher erwiesen.

Register
der
in diesem Büchgen
abgehandelten Materien.

Erster Abschnitt.

Von der Rechenkunst überhaupt. Blatt 15.

Zweyter Abschnitt.

Von den Arithmet. Operationen überhaupt. 21.

Dritter Abschnitt.

Von eben diesen Operationen, insonderheit in den Zahlen, die von gleicher Art sind.

1. Absatz.	Vom Addiren.	22.
2.	Vom Subtrahiren.	25.
3.	Vom Multipliciren.	30.
4.	Vom Dividiren.	38.

Vierter Abschnitt.

Von den Arithmetischen Operationen in den Zahlen, die nicht von gleicher Art sind.

1. Absatz.	Von den Eigenschaften dieser Zahlẽ.	46.
2.	Vom Addiren.	51.
3.	Vom Subtrahiren.	54.
4.	Vom Multipliciren und Dividiren.	55.

Fünfter

Fünfter Abschnitt.

Von den gebrochenen Zahlen.

1. Absatz. Von den Eigenschaften der Brüche. Blatt 59.
2. Wie die Arithm. Operationen damit vorzunehmen. 71.

Sechster Abschnitt.

Von Ausziehung der Wurzeln.

1. Absatz. Vorläufige Erklärungen. 74.
2. Von der Quadratwurzel. 76.
3. Von der Cubicwurzel. 80.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnißen und Proportionen. 84.

Achter Abschnitt.

Von der sogenannten Regel Detri.

1. Absatz. Von dieser Regel überhaupt. 89.
2. Von verschiedenen Anwendungen derselben. 90.

Anhang.

Von den ersten Arithmetischen Operationen der Algebra. 103.

Kurze

Kurze Anleitung zur Rechenkunst

Erster Abschnitt.

Von der Rechenkunst überhaupt.

1. Die Rechenkunst ist eine Wissenschaft aus mehr gegebenen oder bekannten Zahlen andere unbekannte zu finden. Z. B. man soll eine Zahl finden, die so groß ist, wie 5 und 7 zusammgenommen.

2. Eine Zahl aber entstehet, so bald wir mehr einzele Dinge von der nämlichen Art zusammen nehmen. Z. B. wenn wir zu einem Buch noch ein anderes stellen, so haben wir zwey Bücher: stellen wir noch eines dazu hin, so haben wir drey. u. s. w.

Stellen

Stellen wir aber zu einen Buch ein Licht hin, so haben wir weder zwey Lichter, noch zwey Bücher, weil die einzelen Dinge, das Licht, und das Buch, von ungleicher Art sind. Doch wenn wir sie nur schlechthin als Einheiten betrachten, können sie eine Zahl ausmachen, weil sie als Einheiten, oder Dinge zu einerley Gattung gehören.

3. Jede Zahl kann also vermehrt oder vermindert werden. Und das ist auch alles, was man mit den Zahlen vornehmen kann.

4. Wir können aber eine Zahl auf zweyerley Art vermehren oder vermindern; denn wir können zu einer gegebenen Zahl eine oder mehr andere, die aber grösser und kleiner sind, als sie, hinzusetzen, und diese Art zu vermehren, heisset addiren. Oder wir können zu einer gegebenen Zahl eine oder mehr hinzusetzen, die eben so groß wie sie, und ihr gleich sind, und dieß heisset multipliciren.

5. Eben so, wenn wir von einer gegebenen Zahl etwelche kleinere nacheinander hinwegnehmen, wird diese Art eine Zahl zu vermindern Subtrahiren genennet. Nehmen wir aber nur ein, und die nämliche Zahl, so oft wir können, hinweg, heisset diese Verminderungsart Dividiren. Dahero alle Operationen der Arithmetik eigent-

eigentlich nur im Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, oder Dividiren bestehen.

6. Ehe wir von jedem insonderheit handeln, müssen wir die Zahlen kennen, lesen und schreiben lernen.

7. Im Zählen, wenn man von Eins bis Zehen fortgerückt, fängt man jederzeit wieder von Eins an, und setzt hinzu, wie oft man Zehen gezählt.

So ist z. B. Eilf eben so viel, als Zehen und Eins. Zwölf eben so viel, als Zehen und Zwey &c.

8. Man hat nun verschiedne Nämen angenommen, um damit sowohl die ersten einfachen Zahlen, als die Zahlen der Zehner u. s. w. kurz auszudrücken.

Die Nähmen der einfachen Zahlen sind Eins, zwey, drey, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

Die Zahlen der Zehner werden so ausgedrückt: Zehn, zwanzig, dreyßig, vierzig, fünfzig, sechzig, siebenzig, achtzig, neunzig, Hundert.

Zehnmal Hundert nennt man Tausend.
Tausendmal tausend „ eine Million.
Eine Million der Millionen „ Billion.
Eine Million der Billionen „ Trillion.
Eine Million der Trillionen „ Quatrillion &c.

9. Damit man aber auch die allergrößten Zahlen ohne ihre Namen herzuschreiben, kurz ausdrücken konnte, bediente man sich für die ersten neun einfachen Zahlen folgender Zeichen: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. und eignete ihnen verschiedne Werthe zu, nach dem Orte, an welchem sie in ihrer Reihe stünden.

10. Dieser Werth fängt sich in jeder Reihe der Zahlen rechter Hand an, und nimmt in zehenfacher Proportion gegen der linken Hand immer zu, so, daß die erste Zahl (von der rechten zur linken) lauter Einser, die zweyte lauter Zehner, die dritte lauter Hundert oder Zentner, die vierte so vielmal Tausend, die fünfte so vielmal Zehentausend, die sechste so vielmal Hunderttausend, die siebende so viel Millionen, die achte so vielmal zehen Millionen, die neunte so vielmal hundert Millionen rc. bedeute, als sie Einser in sich enthält.

11. An jene Stelle, wo gar keine Zahl vorkömmt, setzt man, am Platz der Zahl, das Zeichen o Nulle hin.

12. I. Aufgabe. Was immer für eine geschriebene Zahl lesen und aussprechen. z. B. 437, 821. 506, 930. 582, 103.

Aufl. 1. Theile die gegebene Zahl von der Rechten zur linken in Classen so ab, daß in

jeder Classe drey Zahlen oder Ziffern stehen: und wechselweis durch Strichlein und Puncte, nämlich nach drey Ziffern unten ein Strichlein, und wieder nach drey unten ein Punct.

2. Ueber den ersten Punct mache oben ein Strichlein, über den zweyten zwey, über den dritten drey u. s. w.

3. Sprich in jeder Classe, wo drey Zahlen vorkommen, von der linken zur rechten, die erste durch Hundert, die zweyte durch Zehen, die dritte durch Einser, ein unten angesetztes Strichlein aber jederzeit durch Tausend, ein oben angesetztes hingegen durch Million, zwey dergleichen durch Billion, drey durch Trillion aus, so ist die Zahl gelesen, und heisset die unsre so: viermal hundert sieben und dreyßig **tausend**, acht hundert ein und zwanzig **Billionen**, fünfhundert Sechs **tausend** neunhundert dreyßig **Millionen**, fünf hundert zwey und achtzig **tausend** ein hundert und drey.

13. Anmerkung. Der unvergebliche Fehler, den in Auflösung dieser Aufgabe la Chappelle in seiner Arithmetik, und nach ihm Georg Mezburg, oder wenigst sein Uebersetzer begangen, ist offenbar, und wird von mir nur darum hier angezogen, weil ich weiß, daß sich schon manche Anfänger darüber vergebens den Kopf gebrochen.

14. II. Aufgabe. Man soll eine gegebene Zahl schreiben.

z. B. Du fragst einen Mathematicker, wie viel man deutsche Meil wohl hinter sich legen müßte, um von unserer Erde bis zum obersten Planeten den Saturnus zu kommen? Er antwortet: Hundert ein und fünfzig Millionen, sechshundert drey und vierzig tausend achthundert. Nun willst du diese Zahl zu Papier bringen.

Aufl. 1. Schreibe vor allen die höchste, das ist, diejenige Classe an, die vor dem Wort Million, Billion, oder Trillion ꝛc. nachdem die Zahl grösser, oder kleiner ist, muß ausgesprochen werden. Hier besteht die höchste Classe nur aus Millionen. Schreib daher 151′ mit dem Zeichen der Million, welches du ober dem letzten Ziffer dieser Classe anbringest.

2. Bemerke alsdann durch Strichlein oder Puncte gegen der Rechten so viel Classen, als nothwendig folgen müssen, daß die erste Classe zu Millionen werde; wozu zwo nachkommende erfordert werden. Schreib dahero

151′ . . . , . . .

3. Nun schreibe statt der Puncte in die erste folgende Classe Sechshundert drey und vierzig

vierzig (643) in die letzte achthundert (800) so wird die ganze Zahl zu Papier gebracht seyn, und so aussehen:

151'643,800.

15. Anmerkung. Die öftere Uebung wird einem Anfänger diese Aufgabe so leicht machen, daß er auch die größten Zahlen ohne Beschwerniß, und ohne viel Nachdenkens fast so behend hinschreibe, als sie ihm angegeben wird, und diese Uebung ist sehr nützlich.

Zweyter Abschnitt.

Von den arithmetischen Operationen überhaupt.

16. Durch eine jede arithmetische Operation wird aus zwoen oder mehr gegebenen oder bekannten Zahlen eine neue zuvor unbekannte Zahl gefunden.

17. Eine jede dieser gefundenen Zahlen aber hat ihre besondere Eigenschaft, welche in uns den deutlichen Begrif derjenigen Operation erwecket, durch die sie gefunden worden.

Anmerkung. Alle Begriffe oder Definitionen in der Arithmetik sind, auf seine Art, praktisch; und so lang man diese versteht und behält, wird man die Rechenkunst so leicht nicht vergessen.

18. Wir haben also, um die arithmetischen Operationen zu unterscheiden, nur auf die Eigenschaft zu sehen, welche die Zahl haben muß, die durch diese oder jene Operation soll gefunden werden.

Dritter Abschnitt.

Von den arithmetischen Operationen der Zahlen, die von gleicher Art sind.

§. 1.

Vom Addiren.

19. **Addiren** oder **Summiren** heisset eine Zahl finden, die mehr gegebenen Zahlen miteinander gleich ist.

Die bekannten Zahlen, die man addirt, werden die Gegebene, oder die Summirende, die gefundene Zahl aber wird die Summe genennet.

20. **Aufgabe.** Mehr gegebene Zahlen addiren oder unter eine Summe bringen.

Aufl. Man schreibe die gegebenen Zahlen so untereinander hin, daß die Einser unter die Einser, die Zehner unter die Zehner, die Zentner unter die Zentner ꝛc. zu stehen kommen.

2. Nachdem man eine Linie unter die so angeschriebenen Zahlen gezogen, zehle man von unten auf die Einser, oder die letzten rechter Hand untereinander stehende Ziffer besonders in eine Summe zusamm, und setze diese Summe gerade darunter.

Hält etwann diese Summe einen oder mehr Zehner in sich, werden alle diese zur folgenden Summe der Zehner gerechnet, und nur das letzte Ziffer allein unter die Einser geschrieben.

3. Eben so verfährt man mit der untereinander geschriebenen Reihe der Zehner, und wirft die sich etwa in der Summe befindende Zehner, wenn sie einen oder mehr Zentner ausmachen, in die folgende Classe. Macht mans nun mit den folgenden Reihen eben so, ist die begehrte Summe gefunden.

21. Hier steht ein Beyspiel:

Man soll folgende Zahlen addiren 12793, 3458, 674, 36, 5.

Man schreib sie nun so untereinander 12793
3458
674
36
5

So ist die gefundene Zahl oder Summe 16966

22. Wer acht gibt, was in dieser Operation vorgegangen, wird ohne weiterem Beweis wahrnehmen, daß die gefundene Zahl alle Einser, alle Zehner, alle Zentner u. s. w. der gegebenen Zahlen in sich enthalte, und mithin allen zusammgenommen gleich sey, welches addiren heisset.

23. 1. **Anmerkung.** Um im schreiben kürzer davon zu kommen, haben die Mathematicker nebst den neun Zahlen noch andere Zeichen angenommen. (=) heisset also bey ihnen gleich. (+) ist das Zeichen der Addition, und heisset so viel, als und.

Wenn wir dahero schreiben wollen: Sechs und vier ist gleich zehen, drücken wir diesen Satz so aus: $6 + 4 = 10$.

24. 2. **Anmerkung.** Von der Probe der Addition hab ich hier noch nichts zu sagen, weil die, welche man insgemein durch die weggeworfenen Neuner macht, sehr unrichtig ist; eine andere aber noch nicht kann verstanden werden. Wenn die Rechnung von einer Wichtigkeit ist, kann man die Addition der nämlichen Zahlen zu verschiedenen Zeiten öfter vornehmen, oder auch von andern vornehmen lassen: kömmt jederzeit die nämliche Summe heraus, kann man zuverläßig urtheilen, es sey kein Fehler eingeschlichen.

2. §.

Vom Subtrahiren.

25. Subtrahiren oder Abziehen heisset, aus zwoen gegebenen eine dritte unbekannte Zahl finden, welche wenn wir sie zur kleinern aus den zwoen gegebenen addiren, die Summe der grössern wieder gleich werde.

Anmerkung. Wenn die zwo gegebenen Zahlen einander gleich sind, ists ohnehin offenbar, daß nichts im Rest bleibe; wir können also den vorgehenden Begrif der Subtraction wohl für allgemein annehmen.

z. B. Wenn wir 4 von 9 subtrahiren, bleibt im Rest 5. Es ist aber $5 + 4 = 9$.

26. Die durch diese Operation gefundene Zahl wird die Differenz, oder der Rest genennt.

27. Das Zeichen der Subtraction ist bey den Mathematickern dieß (—), und heisset auf deutsch weniger. Wenn ich also 9 weniger 5 ausdrücken will, schreibe ich nur $9 - 5$, das ist, man soll 5 von 9 wegnehmen, um die Differenz 4 zu erhalten; denn es ist $9 - 5 = 4$.

28. Aufgabe. Eine gegebene Zahl von einer andern ebenfalls gegebenen grössern abziehen.

Aufl. Man schreibe die gegebenen Zahlen eben so untereinander, wie beym addiren (§.20.)

2. Nachdem man eine Linie unter die so angeschriebene Zahlen gezogen, zieh man die Einser von den Einsern, die Zehner von den Zehnern, die Zentner von den Zentnern u.s.w. ab, und schreibe den Rest gerad darunter.

3. Ob zwar jederzeit die ganze Zahl, die ich von einer andern abziehen will, kleiner seyn muß, als jene ist, von der ich sie abziehe: geschieht es doch sehr oft, daß einige aus den gegen der rechten Hand stehenden Ziffern der kleinern Zahl grösser seyn, als die gerade oberhalb stehende Ziffer der grössern Zahl, wovon ich sie doch abziehen soll. Z. B. Ich soll 26 von 32 abziehen, so schreibe ich $\begin{array}{r} \dot{3}2 \\ 26 \\ \hline \end{array}$ Nun ist zwar 26 kleiner als 32. es ist aber 6 grösser, als 2.

In diesem Falle denn muß ich von der nächstfolgenden Zahl 3 (das ist 30) einen Zehner borgen, und zur vorigen Zahl (2) setzen, so kann ich 6 von 12 abziehen. Die vorige Zahl aber 3 oder 30, wird nicht mehr 3, sondern 2, oder 20 heissen. Ist demnach 32 — 26 = 6.

Um nicht so leicht verwirrt zu werden, bezeichnet man die Zahl, von der man einen Zehner geborget, mit einem Punct, welcher uns

uns sagt, daß die Zahl nunmehr um Eines weniger bedeute.

Wäre die folgende Zahl, von der ich borgen sollte, eine 0 oder kämen mehr solche Nullen nacheinander, müßte ich alle mit Puncten bezeichnen, und den Zehner endlich von derjenigen Zahl borgen, die gegen der linken Hand zunächst an der Nulle steht. Dahero alle diese mit Puncten bezeichnete Nullen lauter neuner bedeuten.

29. Beyspiel. Ich soll 7437986 von 9000562 abziehen, so ist die Operation folgende:

```
  . . . . . . .
  9000562
  7437986
  -------
  1562576 Rest.
```

30. Man sieht von sich selbst, ohne fernerem Beweise, wenn man nur acht giebt, daß in dieser Art zu rechnen, die gefundene Zahl den Rest aller Theile der grössern Zahl in sich enthalte, und mithin, wenn wir diesen Rest wieder zu der weggenommenen Zahl addiren, die Summe nothwendig der grösseren gegebenen Zahl wieder gleich werden müsse, welches (§. 25.) Subtrahiren heisset.

31. Jetzt dörffen wir uns um eine richtige Probe der Addition sowohl, als

Subtraction nicht mehr viel umsehen; denn jede aus beyden kann uns zur Probe der andern dienen.

32. **Probe der Addition.** Wenn nur zwo Zahlen gegeben werden, darf man nur was immer für eine aus den gegebenen von der Summe abziehen, so muß der Rest, wenn die Operation anders richtig seyn soll, der andern gleich seyn. Z. B. Ich habe 35708 zu 4973 addirt, nämlich

	35708
	4973
	40681

Zieh ich nun von der gefundenen Sum̃e	40681
die Zahl	4973 ab.
So ist der Rest	35708

der grösseren aus den zwo gegebnen Zahlen gleich, und hiemit die Addition richtig.

Machen aber die gegebenen Zahlen mehr Reihen aus, wie in dem (§. 21.) angebrachten Beyspiel, nämlich

12793
3458
674
36
5
16966

darf man nur aus allen gegebnen Zahlen zwo Partikularsummen machen, und eine davon von der

der Hauptsumme abziehen: kömmt die andere im Rest heraus; so hat die Addition seine Richtigkeit. In unserm Beyspiel wäre

12793	674
+ 3458	36
Die erste 16251 part. Summe	5
	715 die zweyte part. Summe.

Es ist aber 16966 — 715 = 16251, und folglich die Addition richtig.

33. **Probe über die Subtraction.** Weil wir durch die Subtraction aus zwoen gegebenen Zahlen eine dritte finden, die mit der weggenommenen eine Summe macht, welche der grösseren gegebenen Zahl gleich ist, (§. 25.) braucht es mehr nicht, als daß man den Rest zur weggenommenen Zahl addire. Wird die Summe der grössern Zahl gleich, so hat die Subtraction seine Richtigkeit.

Nehmen wir nur das Beyspiel vom (§. 29.) wieder vor uns, so ist

9000562 — 7437986 = 1562576.

Es ist aber 7437986 + 1562576 = 9000562. Da haben wir also eine unwiderlegliche Probe, daß wir recht subtrahirt haben.

Anmerkung. Ein Anfänger wird sehr vortheilhaft handeln, wenn er diese, und einen Haufen dergleichen Beyspiele selbst zu machen vor sich nimmt.

3. §.

Vom Multipliciren.

34. Multipliciren oder vermehren heisset, aus zwoen gegebenen Zahlen eine dritte unbekannte Zahl finden, in welcher was immer für eine aus den gegebenen so oft enthalten ist, als Eines, oder der Einser, in der Anderen.

Diesen Begrif von der Multiplication wird ein kurzes Beyspiel deutlicher machen. Wenn ich 3. durch 4. multiplicire, bekomm ich für die gefundene dritte Zahl 12. Nun aber ist, wie 1 in 4, also auch 3 in 12 viermal, und wie 1 in 3 also auch 4 in 12 dreymal enthalten.

35. Die durch das Multipliciren gefundene Zahl wird das Product oder Factum, die zwo gegebenen aber die Factores genennet.

36. Das Zeichen der Multiplication ist entweder ein Punct, oder ein schiefliegendes Kreuz (⋊) wir schreiben also z. B. zwey multiplicirt durch sieben so: 2 . 7, oder so: 2 ⋊ 7.

37. Anmerkung. Die Erfahrung hat michs gelehret, daß so manche Anfänger bey dieser Operation in ihrer Arithmetik nur darum stecken bleiben, weil sie die verdrüsliche Beschwerniß nicht überwinden wollen, das sogenannte Einmal Eins in die Gedächtniß zu bringen. Ich denke ihnen

hier die saure Arbeit wenigst um die Hälfte leichter zu machen, wenn sie nur aufmerken wollen.

38. Jede Zahl, wenn wir sie durch 1 multipliciren, bleibt sie immer die nämliche Zahl.

39. Alles, was ich verlange, das ein Anfänger schon auswendig, und zwar behend wisse, ist in folgender kurzen Tabelle enthalten: und er weiß es vermuthlich ohnehin schon.

2	mal	2	ist	4
2		3		6
2		4		8
〃		〃	〃	〃
2		6		12
2		7		14
2		8		16
〃		〃	〃	〃
3		3		9
3		4		12
〃		〃	〃	〃
3		6		18
3		7		21
3		8		24
〃		〃	〃	〃
4		4		16
〃		〃	〃	〃
4		6		24
4		7		28
4		8		32
〃		〃	〃	〃
6		6		36

40. Beobachte man in dieser Tabelle, daß weder ein Fünfer (5) noch ein Neuner (9)

darinn enthalten sey. Wir müssen also durch 5 und durch 9, ohne es auswendig zu lernen, zu multipliciren wissen.

41. I. Lehrsatz. Wenn man eine Zahl durch 5 multipliciren will, darf man sie nur halbiren. Ist sie eine gerade Zahl, die sich genau halbiren läßt: setzt man zu ihrer Hälfte eine Nulle, so ist sie eben darum schon durch 5 multiplicirt.

z. B. Es fragt sich, wie viel ist fünfmal acht? das ist, 5 ⋈ 8. So sage ich: halb acht ist 4. setze ich nun eine Nulle hinzu, so hab ich 40 = 5 ⋈ 8.

Ist die Zahl aber ungerad, und bleibt im halbiren ½ über, macht man aus diesem Rest (½) einen Fünfer (5) und setzt ihn zur vorigen Hälfte hin, so ist auch die ungerade Zahl durch 5 multiplicirt.

z. B. Ich werde gefragt: wie viel ist fünfmal sieben, das ist 5 ⋈ 7. So sage ich: halb sieben ist 3 † ½ mache ich nun aus ½ einen Fünfer (5) und setze ihn zu 3 hin, so hab ich 35 = 5 ⋈ 7 u. s. w.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz hat auch in grösseren und zusammgesetzten Zahlen seine Richtigkeit. Der Beweis davon braucht nicht viel Nachdenkens,

denkens, wenn man nur bedenken will, daß eine Nulle zu was immer für einer Zahl hinsetzen, eben so viel heisse, als sie durch 10 multipliciren; die Hälfte aber von 10 = 5 sey.

42. II. Lehrsatz. Wenn man eine gegebene Zahl durch 9 multipliciren will, darf man von dieser gegebenen Zahl nur Eins (1) subtrahieren, und dem Rest eine solche Zahl an die rechte Seite setzen, die mit ihm 9 ausmachet.

z. B. Man begehrt zu wissen, wie viel Siebenmal Neun ausmache: das ist 7 ⋈ 9. So sage ich: 1 von 7 bleibt 6. Diesem Rest 6 nun muß ich 3 an die Seite setzen, damit die Summe von beyden = 9 werde, so hab ich 63 = 7 ⋈ 9. Wiederum, wie viel macht 6 ⋈ 9. So sage ich: 6 — 1 = 5, 5 † 4 = 9. Dahero 6 ⋈ 9 = 54. u. s. w.

43. Anmerkung. Wie dieser Lehrsatz auch bey grössern Zahlen könne angewendet werden, kann dem begierigen Schüler, samt dem Beweise davon, mündlich erkläret werden.

44. Nun weis ein Anfänger fast das ganze Einmal Eins. Nur 6 ⋈ 7. 6 ⋈ 8. 7 ⋈ 7. 7 ⋈ 8. und 8 ⋈ 8. geht ihm noch ab. Und alles dieß kann er so zu sagen im Augenblick bloß durch Bewegung seiner Finger wissen.

45. Aufgabe. Die Producte einfacher Zahlen, welche grösser als 5, durch die Finger bestimmen.

Aufl. 1. Mache mit beyden Händen eine Faust, und zehle bey jeder 5 zum voraus.

2. Um so viel nun ein jeder Factor die Zahl 5 übertrifft, so viel Finger strecke in jeder Hand aus, die übrigen aber lasse liegen.

3. Die ausgestreckten Finger bedeuten lauter Zehner. Multiplicirest du nun die Zahlen der liegenden Finger durcheinander, und setzest das Product zu den gefundenen Zehnern, so ists geschehen. Etliche Beyspiele samt den Figuren soll die ganze Kunst erklären.

Du verlangest zu wissen, wie viel 6 mal 7 sey. Weil 6 — 5 = 1 und 7 — 5 = 2. so streckest du in einer
1. Fig. Hand einen, in der andern zween Finger in die Höhe, und zählest darum 30. weil aber in der Hand A 3, und in der Hand B 4 Finger liegen geblieben, sagst du: 3mal 4 giebt 12. Nun ist 30 + 12 = 42. Willst du das Product von 7mal 7 errathen. Weil
2. Fig. 7 — 5 = 2. so strecke in jeder Hand zween Finger in die Höhe, und zähle 40. Da nun in jeder Hand 3 Finger liegen geblieben,

geblieben, sage: 3mal 3 ist 9. Es ist aber 40 + 9 = 49 = 7 × 7.

Noch ein Beyspiel. Du sollst das Product von 6mal 8 bestimmen, weil 6 — 5 = 1. und 8 — 5 = 3. strecke in der einten Hand einen, in der andern drey Finger aus, und zähle also 40. Es sind aber in der einten Hand 4 in der andern 2 Finger liegen geblieben, sage also: 2mal 4 ist 8. Es ist aber 40 + 8 = 48. Wollen wir das Product aus 7mal 8 bestimmen, werden unsere beyden Hände so, wie in der 4ten Figur aussehen, und 56 herauskommen. 3.Fig. 4.Fig.

Die fünfte und letzte Figur endlich zeigt die Lage der Finger für das Product aus 8mal 8, und giebt, nach dem vorhergehenden Unterricht, 64. Jetzt können wir in unsrer Multiplication ungehindert fortfahren. 5.Fig.

46. **Aufgabe.** Eine gegebene Zahl durch eine andere gleichfalls gegebene Zahl multipliciren.

Aufl. 1. Man schreibe die beyden Zahlen eben so untereinander hin, wie bey dem subtrahiren.

2. Besteht die Zahl, mit der ich multiplicire, nur aus einem Ziffer, so multiplicire man damit alle Ziffer der andern gegebenen Zahl insonderheit, und schreibe das Product davon so unter jede, daß die Zehner, wie beym addiren, zum folgenden Product, um eine Stelle weiter hinein gegen der linken, gerückt und gezählt werden.

Z.B. Man soll 789 durch 3 multipliciren, so sieht die Rechnung so aus,

789
3

und ist das Product = 2367.

3. Ist aber die Zahl, mit der man multiplicirt, eine zusammgesetzte, und aus mehr Ziffern bestehende Zahl, so multiplicire man, von der äussersten rechter Seits angefangen, durch eine jede insonderheit alle Ziffer der obern Zahl, wie zuvor. Die Producte aber aus den Zehnern fängt man unter die Zehner, oder unter die vorletzte Zahl des erstern Products, die Product aus den Centnern unter die drittletzte u. s. f. zu schreiben an.

4. Die gefundenen Particularproducte addirt man, so giebt ihre Summe das ganze Product.

Hier steht wieder ein Beyspiel.

Man soll 34652 durch 395 multipliciren, so

wird

wird die Rechnung ohngefähr so aussehen, und

34652
395
173260
311868
103956

Das Product = 13687540 seyn.

47. Wenn man auf die Operation acht giebt, wird man leicht wahrnehmen, daß das erste aus den particular Producten 173260 die Zahl 34652 fünfmal, das ist, so oft in sich enthalte, so oft 1 in 5 enthalten ist.

Eben so, weil man das zweyte Product am Platz der Zehner zu schreiben angefangen, wird auch dieses die Zahl 34652 neunmal, das ist, so oft in sich enthalten, so oft 1 in 9. u. s. w.

Es ist aber das letzte Product die Summe aller Particular-Producte: so hält dann auch dieß die multiplicirte Zahl so oft in sich, so oft die multiplicirende 1 enthält, das ist 395 mal.

48. Anmerkung. Wenn in einem oder in beyden Factoren zuletzt ein, oder mehr Nullen sich befinden, multiplicirt man nur die übrigen Zahlen durcheinander, und setzet zum Product so viele Nullen hin, als am Ende beyder Factoren zusammgenommen stünden.

Z. B.	370	460	
	4	300	ꝛc.
	1480	138000	

49. **Anmerkung.** Weil die einzige richtige Probe der Multiplication nur im dividiren bestehet, können wir sie erst am Ende des folgenden Absatzes erklären.

4. §.
Vom Dividiren.

50. **Dividiren, oder theilen,** heisset aus zwoen gegebenen eine dritte unbekannte Zahl finden, in welcher 1 so oft, als die kleinere aus den zwoen gegebenen in der grössern Zahl enthalten ist.

51. **Anmerkung.** Wenn die zwo gegebenen Zahlen einander gleich, ists ohnehin offenbar, daß, wie 1, also auch eine jede andere Zahl nur einmal in sich selber enthalten ist. Wir können dahero diesen vorgehenden Begriff vom dividiren wohl wieder für allgemein gelten lassen.

Z. B. Wenn wir 12 durch 4 dividiren, kömmt 3 heraus. Es ist aber 4 in 12 so oft, als 1 in 3, nämlich 3mal enthalten.

52. Die durch diese Operation gefundene Zahl heisset der **Quotient.**

Die Zahl, welche dividirt wird, nennet man **Dividendum**; die andere, durch die man dividirt, den **Divisor.**

53. Das Zeichen der Division sind entweder zween Puncte, die man zwischen zwo Zahlen hinein setzet; so heisset 9 : 3

so

so viel als, 9 dividirt durch 3. Oder man kann eben dieß auch so ausdrücken: ($\frac{9}{3}$.)

54. Aufgabe. Eine gegebene Zahl durch eine andere kleinere Zahl dividiren.

Anmerkung. Hier muß ein Anfänger zween Fälle unterscheiden, und für jeden besondere Regeln beobachten; denn entweder ist der Divisor nur eine einfache Zahl, wie z. B. 2. 3. 4. 5 ꝛc. oder er hat noch andere neben sich stehen, wie z. B. 32. 56. 245 ꝛc.

55. Auflösung der vorigen Aufgabe für den ersten Fall.

1. Setze den Divisor unter die erste (oder wenn er grösser als die erste Zahl wäre, unter die zweyte) Zahl zur linken, und frage, wie oft er in derselben enthalten sey. Die Zahl, die solches anzeiget, wird der Quotient seyn, den du hinter den zur Rechten gemachten Strich setzest.

2. Durch eben diesen Quotienten multiplicire den Divisor, und zieh das Product von der Zahl ab, die du eben dividirt hast. Streiche dieselbe aus, und setze den Rest darüber hin.

3. Rucke deinen Divisor um eine Stelle weiter gegen der Rechten fort, und frage wieder, wie oft er in der zur linken übergebliebenen und der neuen ober ihm stehenden Zahl enthalten sey. Schreib den Quotienten wieder zu dem vor ge-

fundenen hin, wie oben (N. 2.) Wenn du es so durch alle Zahlen deines Dividendi gemacht, hast du den verlangten Quotienten gefunden.

Beyspiel. Man soll 7618 durch 2 dividiren:

```
                              1  |
so ist die Rechnung diese  7618  | 3809
                           2222  |
```

und in diesem Falle hat auch ein Anfänger insgemein keine sonderbare Beschwerniß. Der zweyte Fall giebt ihm ein wenig mehr zu schaffen.

56. Auflösung für den zweyten Fall.

1. Fang den Divisor unter die erste Zahl zur linken (wenn er nicht schon etwann grösser als sie ist) gegen der Rechten fort zu schreiben an, und mache einen Strich hinter die Zahl. z. B. Man soll 66734 durch 325 dividiren, so schreib

```
66734 | 2
325   |
```

2. Frage, wie oft die erste Zahl deines Divisors, nämlich 3 in der oberen 6 enthalten sey, und sprich: 3 in 6 ist zweymal. Schreib 2 hinter den Strich.

3. Durch den gefundenen Quotienten (2) multiplicire deinen ganzen Divisor, so bekömmt deine Rechnung folgende Gestalt

```
66734 | 2
325   |
650
```

4. Dieß

4. Dieß Product (650) zieh von den obern Zahlen des Dividendi ab

```
66734 | 2
325
650
-----
```

So ist der Rest = 17

5. Zu diesem Rest setze die folgende noch nicht dividirte Zahl (3) herab

```
66734 | 20
325
650
-----
173
```

6. Jetzt frage wieder: wie oft ist 325 in 173; oder, was eben so viel heisset, wie oft ist 3 in 1 enthalten? weil aber 3 grösser als 1, so ist 3 in 1 niemal enthalten: schreib also am Platz des Quotienten eine Nulle.

7. Jetzt sollst du (wie N. 3.) durch den neu gefundenen Quotienten wieder den Divisor multipliciren; weil aber der Quotient eine Nulle und niemal 325 = 0 ist, so schreibest du die letzte Zahl 4, ohne weiters, zu 173 herab, und den Divisor darunter, nämlich

```
66734 | 20
325
650
-----
1734
325
```

8. Nun sagst du wieder: 3 in 17 ist 5 mal enthalten, und schreibst den Quotienten (5)

an seine Stelle, und multiplicirest, wie (N. 3.) so bekömmst du 1625. dieß von 1734 subtrahirt

66734	205	$\frac{109}{325}$
325		
650		
1734		
325		
1625		

Giebt den Rest = 109

den du ober den Quotienten an: und den Divisor darunter hinschreibest, so ist die Rechnung fertig.

57. Wenn man die Rechnungsart oder Operation nur etwas genauers untersucht, sieht man von sich selbst, daß die gefundene Zahl genau anzeige, wie oft der Divisor in allen Theilen des gegebenen Dividendi enthalten sey, und folglich diese gefundene Zahl so oft 1 enthalte, so oft der Divisor 325 in 66734 zu finden.

58. **Anmerkung.** Jetzt können wir erst die Probe über die Multiplication, und über die Division zugleich erklären; denn diese muß durch jene, und jene durch diese geprüft werden. Wir müssen aber einen Lehrsatz vorausschicken, den wir gleichwohl indessen hier als erwiesen annehmen müssen, weil er sich auf die geometrischen Proportionen gründet, von denen ich in diesem Werkgen nur gar wenig zu sagen habe, weil ich sie in meiner

Alge-

Algebra abgehandelt. *) Der Lehrsatz aber ist folgender.

59. Lehrsatz. Wenn wir ein aus zwoen gegebenen Zahlen oder Factoren entstandenes Product durch was immer für einen aus diesen beyden Factoren dividiren, wird der Quotient jederzeit der andere Factor seyn.

Erklärung. Wir multipliciren z. B. 3 durch 4 so ist das Product = 12. Dividiren wir nun 12 durch 3, so ist der Quotient = 4, dividiren wir aber 12 durch 4, ist der Quotient = 3.

60. Probe über die Multiplication. Dividire das Product durch einen aus den Factoren. Kömmt am Platz des Quotienten der andere Factor heraus, so ist die Multiplication richtig.

Beyspiel. §. 46. hatten wir

$$34652 \times 395 = 13687540$$

Es ist aber $\frac{13687540}{395} = 34652$ (dividirt durch 395)

und $\frac{13687540}{34652} = 395$ (dividirt durch 34652)

61. Probe

*) Anwendung der feinern Mathematik ꝛc. §.

61. Probe über die Division.

Multiplicire den Divisor durch den gefundenen Quotienten. Wird nun das Product dem Dividendo gleich, so ist die Division richtig.

Beyspiel. §. 55. haben wir 7618 durch 2 dividirt: unser Quotient war = 3809. Es ist aber 3809 × 2 = 7618. Mithin war unsre Division richtig.

62. Anmerkung. Gar oft läßt sich die gegebene Zahl durch den gegebenen Divisor nicht eben genau dividiren, sondern bleibt noch etwas im Rest, das auf arithmetisch eine Fraction, oder ein Bruch heisset, wie §. 56. in der Auflösung für den zweyten Fall,

von 66734 dividirt durch 325 der Quotient war $205\frac{109}{325}$

Will man nun hier die Probe machen, so multiplicirt man, wie zuvor, den Quotienten 205 durch den Divisor 325

Zu dem Product 66625 aber
addiret man 109 den Renner oder die obere Zahl der Fraction
So ist das Product 66734 dem Dividendo wieder gleich.

63. Anmerkung. Es giebt noch verschiedne Arten zu dividiren. Ich will aber nur eine davon hersetzen, der ich mich insgemein selber bey grössern Zahlen zu bedienen pflege, weil sie mir jederzeit die bequemste und die richtigste zu seyn schien.

64. Eine

64. Eine andere Auflösung der vorhergehenden Aufgabe.

Diese zu erklären wollen wir die nämliche Zahl 66734 wieder durch 325 dividiren.

1. Schreib die Zahl wie sonst: 66734 und mach dahinter einen Vertical-Strich: unter die Stelle des Quotienten aber einen Horizontalstrich.

66734	325	1
	650	2
	1625	5

2. Unter diesen zweyten Strich schreib den Divisor 325 hin, und darneben zur Rechten 1.

3. Multiplicire den nämlichen Divisor durch 2, und schreib das Product 650 unter ihn her, ausser den Strich aber, zur Rechten, schreib 2.

4. Endlich multiplicire noch einmal diesen Divisor 325 durch 5, und schreib das Product unter das vorige. Zur Seiten aber schreib 5, so kannst nun aus dieser kleinen Tabelle leicht alle Multipla, oder vielfachen Zahlen deines Divisors haben.

66734	$205 \frac{109}{325}$	
650	325	1
1734	650	2
1625	1625	5
109		

5. Nimm so viel Zahlen deiner Zahl, die du dividiren willst, als der Divisor Theile hat, nämlich in unserm Beyspiele die drey ersten 667. Diese vergleiche mit dem Divisor, so kannst du leicht sehen, daß ihr die Zahl 650

am

am nächsten kömmt, und hiemit der Quotient = 2 sey. Diesen schreibe an seine Stelle, und die Zahl 650 zieh von 667 ab. Zum Rest aber 17 schreib die folgende, nämlich 3 herab, und weil 173 kleiner als 325, und folglich diese Zahl in jener niemal enthalten, schreib ohne weiters am Platz des Quotienten eine Nulle (0) hin, und setze die folgende Zahl 4 herab.

6. Vergleiche diese (1734) wieder mit deinem Divisor, so siehst du leicht, daß ihr die Zahl 1625 am nächsten kömmt, und mithin der Quotient = 5 sey. Schreib ihn an sein gehöriges Ort, zieh das gefundene Product 1625 von 1734 ab, so bleibt im Rest 109 welches der Neuner der Fraction ist. $\frac{109}{325}$

65. Anmerkung. Wer einmal diese Art zu dividiren in Uebung gebracht, wird bald ihre Vorzüge vor allen andern einsehen, und erfahren, daß sie aus allen die kürzeste, die bequemste, und gewiß die sicherste sey.

Vierter Abschnitt.

Von den arithmetischen Operationen in Zahlen, die nicht von gleicher Art sind.

1. §.

Von der Natur dieser Zahlen.

66. Münzen, Abmessungen der Zeit, Längen=

Längenmaaße, Ausmessungen der Plätze und Körper, Trinkmaaße, Gold- Silber- und andere Gewichte, verschiedene Getraidmaaße, und dergleichen sind in dem gemeinen Wesen der beständige Gegenwurf des bürgerlichen Handels. Weil aber alle diese Dinge aus ungleichen Theilen bestehen, müssen nothwendig auch verschiedne Theile, die nicht von der nämlichen Art und Nahmen sind, in unsren Rechnungen vorkommen. Wir müssen also mit diesen ungleichen Theilen die nämlichen Veränderungen und Operationen vorzunehmen wissen, die wir bisher mit den Zahlen von gleicher Art vorgenommen.

67. Es sind demnach die Zahlen von ungleicher Art nichts anders, als verschiedne Theile des nämlichen Ganzens. Z. B. 3 Gulden, 7 Kreuzer, 3 Pfenninge sind Zahlen von ungleicher Art, weil die Kreuzer sowohl als die Pfenninge Theile, aber verschiedne Theile des nämlichen Guldens sind. Und wir werden es in der folgenden Abhandlung erklären, daß diese Theile unter die Gattungen der Brüche gehören, und 7 Kreuzer = $\frac{7}{60}$ 3 Pfenninge aber = $\frac{3}{240}$ eines Guldens seyn.

68. **Anmerkung.** Um die Operationen mit diesen Zahlen vornehmen zu können, ist nöthig, daß man sich zuvor die Theile der in jedem Lande, wo man die Rechnung vornehmen soll, gangbaren Münzen, Gewichte, und Maaße ꝛc. bekannt mache.

Ich

Ich will nur einige aus denjenigen hersetzen, die bey uns die üblichsten sind, und in den bürgerlichen Handlungen am öftesten vorkommen.

In dem Getreidmaaß.

1. Scheffel	hält	6. Metzen.
1. Metze	: :	2. Viertl.
1. Viertl	: :	4. Vierlinge.
1. Vierling	: :	2. Mäßl.
1. Mäßl	: :	4. Dreyßger.

In dem Weinmaaß.

1 Eymer	hält	64 Maaße, oder 32 Viertl.
1 Viertl	: :	2 Maaße.
1 Maaß	: :	2 Seidl.
1 Seidl	: :	2 Quart.

In dem Zeitmaaße.

Anmerkung. Das Jahr wird zwar insgemein in 12. Monathe getheilet. Weil aber diese Monathe ungleiche Zahlen ihrer Tage haben, wird es bequemer seyn, wenn wir das Jahr unmittelbar in Quartal oder Quatember, Wochen, Tage und Stunden ꝛc. theilen.

1 Jahr	hält	4 Quatem.	St. M.
1. Quat.	:	13 Wochen = 91 Tage, † 7. 30.	
1 Woche	:	7 Tage.	
1 Tag	:	24 Stunden.	
1 Stund	:	60 Minuten.	
1 Minute	:	60 Secunden u. s. f.	

In

In dem Längenmaaße.

1 Klafter hält 6 Schuh.
1 Schuh : : 12 Zoll.
1 Zoll : : 12 Linien.
1 Linie : : 12 Puncte oder Scrupel.
1 Elle : : 4 Viertl.

Im Geometrischen Quadratmaaße.

1 Quadratruthe hält 100 Schuh.
1 Schuh : : : 100 Zoll.
1 Zoll : : : 100 Linien.

Im Werkmaaße.

1 Schuh hält 12 Zoll.
1 Zoll : : 4 Viertelszoll oder 12 Linien.
1 Viertelszoll : 3 Linien.

Im Geographischen Maaße.

Jeder Zirkel hält 360° Grade. In jedem grossen Zirkl
1 Grad : 15 deutsche Meile.
1 Meile : 4000 Schritte.
1 Schritt : 5 Schuh.
1 Schuh : 12 Zoll.
1 Zoll : 12 Linien.

Wiederum.

Der Thierkreiß hält 12 Himmelszeichen.
1 Zeichen : : 30° Grade.
1 Grad : : 60' Minuten.
1 Minute : : 60'' Secunden 2c.

Weil auch der Aequator 360° Grade hält, welche innerhalb 24 Stunden alle ° durch den Mittagszirkl laufen, ° folgt, daß 1 Grad des Aquators 4′ Minuten; und 15 Grade eine Stunde in der Zeit geben.

In der Landmünze.

1 Großer Thaler	hält	2 Gulden oder 40 Groschen, oder 30 Batzen.
1 Reichsthaler	:	$1\frac{1}{2}$ Gulden, $22\frac{1}{2}$ Batzen, 30 Groschen.
1 Gulden	:	20 Groschen, 15 Batzen, 60 Kreuzer.
1 Batzen	: :	4 Kreuzer.
1 Groschen	: :	3 Kreuzer.
1 Kreuzer	: :	4 Pfenninge.
1 Pfenning	: :	2 Häller.

Im bürgerlichen Gewichte.

1 Zentner	hält	100 Pfunde.
1 Pfund	: :	4 Vierlinge.
1 Vierling	: :	8 Loth.
1 Loth	: :	4 Quinte.

Im Goldgewichte.

1 Mark	hält	24 Karat.
1 Karat	:	4 Gran.

Im

Im Silbergewichte.

1 Mark	hält	16 Loth.
1. Loth	: :	4 Quint.
1 Quint	: :	4 Pfenninge.
1 Pfenning	: :	2 Häller.

Im Apotheckergewichte.

1 Pfund	hält	12 Unzen.
1 Unze	: :	2 Loth.
1 Loth	: :	4 Drachmen.
1 Drachme	: :	3 Scrupel.
1 Scrupel	: :	20 Gran.

Im Papierkauf.

1 Ballen	hält	10 Riße.
1 Riß	: :	20 Buch.
1 Buch	: :	25 Bogen.

69. Anmerkung. P. Philipp Steinmeyer aus unserer Gesellschaft führet in seinem trefflichen Werke, Tirocinium Arithmeticum betitult, noch eine Menge alter und neuer Münzen, Gewichte und Maaßen an, die einem Anfänger Stof genug verschaffen, die nüzlichsten Uebungen über diesen Abschnitt vorzunehmen.

2. §.

Von Addirung der Zahlen, die von ungleicher Art sind.

70. Aufgabe. Mehr Zahlen, die von ungleicher Art sind, addiren.

Aufl. 1. Setze die ähnlichen Theile, oder die einerley Nämen haben, gerad untereinander: nämlich die Gulden unter die Gulden, die Groschen unter die Groschen rc. und s. f.

	Gulden.	Groschen.	Kr.	Pf.
z. B.	10	9	2	3
	8	5	2	1
		7	—	2

2. Fang die Addition bey der kleinsten Gattung, hier bey den Pfenningen an, so bekömmst du

Guld.	Grosch.	Kr.	Pf.
18	21	4	6

Es machen aber 6 Pfenning 1 Kreuzer 2 Pf.
4 Kreuzer 1 Grosch. 1 Kr.
21 Groschen 1 Gulden 1 Gr.
Dahero

3. So oft in der Summe der kleinern Gattung die nachfolgende größere Gattung enthalten ist, so oft zieh sie von der Summe der kleinern ab, und zähl sie zur Summe der folgenden größeren, den Rest aber schreib jederzeit unter die Reihe, die du summirt hast.

Es ist also die Summe in unserm Beyspiel

Gl.	Gr.	Kr.	Pf.
19.	2.	2.	2.

Etwelche Uebungen über diesen Absatz.

71. Ein Kostherr eines Studentens schickt am Ende des Jahres dem Vater seines Kostgängers folgenden Conto.

	Gulden.	Kr.	Pf.
Für Kostgeld : :	100	—	—
Trunk : :	28	5	—
Dem Schneider : :	17	26	2
Dem Schuster : :	14	58	—
Für die Wäsche : :	8	45	3
Dem Buchbinder : :	3	56	—
Für Bediente zum Ein- u. Ausstand	2	30	—
Summe	175	41	1

72. In einer Familie ist der Großvater alt

	Jahr.*)	Wochen.	Tage.	Stunden.	Min.
	83	25	6	9	30
Die Großmutter	79	17	5	4	—
Der Vater	49	7	3	—	30
Die Mutter	38	6	8	15	—
Der Sohn	20	9	—	—	—
Die Tochter	17	—	5	—	—

Wie alt sind sie zusamm?

Summe =	287	16	—	5	—

D 3 73. Ein

*) Das Jahr wird hier für 52 Wochen gerade angenommen.

73. Ein Mann hat 3 Aecker, davon hält

	Ruth	Schuh.	Zoll.	
Der erste	23	99	5	im Quadrat.
Der zweyte	48	8	9	
Der dritte	56	7	8	Was macht die
Sume?	128	14	22	

3. §.

Von Subtrahirung der Zahlen, die nicht von gleicher Art sind.

74. Aufgabe. Zwo Zahlen, die nicht von gleicher Art sind, subtrahiren.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen, wie beym addiren, untereinander; oben die grössere, unten die kleinere. Jene aber ist die grössere, in welcher die erste Gattung grösser ist, obschon alle übrige kleiner sind; denn es ist ja gewiß

	50 Gulden	2 Kreuzer	1 Pfenning grösser,
als	20 :	45 :	3 : .

2. Subtrahire man die untern Zahlen von den obern, und wenn diese kleiner, als die untere, entlehne man eins von der vorhergehenden höhern Gattung, und bezeichne die Zahl der vorhergehenden Gattung mit einem Punct, zum Zeichen, daß eins davon genommen worden. Das entlehnte aber gilt nunmehr in der kleinern

Gat-

Gattung, zu der es gezogen worden, so viel, als es von dieser kleinern Gattung in sich enthält. Z. B. Du ziehst zur Reihe der Kreuzer einen Gulden herüber, so gilt er 60 u. s. f. und wird also die Reih der Kreuzer um 60 vermehrt.

Etwelche Uebungen über diesen Absatz.

75.	Guld.	Grosch.	Kr.	Pfen.
Einnahme.	244.	9.	2.	3.
Ausgabe.	96.	17.	1.	2
Rest.	147.	12	1.	1

76.	Zent.	Pfund.	Loth.	Quint.
Ein Krämer kauft	20.	38.	14.	2
Er verkauft davon	13.	59.	25.	3
So bleibt ihm noch	6.	78.	20.	3

77.	Scheffel.	Metzen.	Viertl.	Dreißiger.
Ein Baur hebt am Getraide auf	12.	5.	1.	6.
Er hat ausgesäet,	9.	5.	2.	10
So gewinnt er	2.	5	—.	12

4. §.

Von Multiplicirung und Dividirung der Zahlen, die nicht von gleicher Art sind.

78. Anmerkung. Eigentlich zu reden können zwo Zahlen von ungleicher Art ohnmöglich

 durch=

durcheinander multiplicirt noch dividirt werden; denn wer wird sich ein Product z.B. aus Stunden und Mezen, oder aus Ellen und Eymer vorbilden können? Ja sogar können wir z.B Mezen durch Mezen, oder Stunden durch Stunden u. s. f. nicht multipliciren; denn ob ich schon weiß, daß 3mal 4 Mezen 12 Mezen ausmachen, so ist doch nicht zu begreifen, was für ein Product 3 Mezenmal 4 Mezen geben sollen.

Jedoch, wenn von Abmessungen der Längen und Breiten die Rede ist, können wir Ruthen durch Ruthen, Schuh durch Schuh, Zoll durch Zoll u. s. f. multipliciren. Aber solche Producte bleiben nicht einfache Maaße, wie ihre Factoren waren, und diese Gattung der Rechnung gehört nicht hieher, und wir müssen hier den einten Factor oder den Divisor nur lediglich als eine Zahl betrachten, die uns weiters nichts anzeiget, als wie oft wir das nehmen, oder in wie viel Theile wir es theilen sollen, was man uns multipliciren, oder dividiren heisset.

79. Aufgabe. Zahlen von ungleicher Art multipliciren.

Aufl. 1. Fange die Multiplication bey der kleinsten Gattung an, und gieb acht, wie oft die folgende Gattung im Producte enthalten sey.

2. Den Quotienten zähle zur folgenden, den Rest aber schreib unter die Gattung hin, die du multiplicirt hast.

Zum

Zum B. Du sollst 6 fl. 48 x. 3. pf. 3mal haben. Schreib

	fl.	x.	pf.
Schreib	6.	48.	3
			3
So wär das Product	18.	144.	9

Nun aber ist in 9 Pfenning der Kreuzer, oder 4 Pfenning zweymal enthalten, und bleibt noch 1, so zähle die 2 zu den Kreuzern, und schreib 1 unter die Pfenninge, so bekömmst du 146 x. 1 pf.

Es ist aber auch in 146 x der Gulden, oder 60 x 2mal enthalten, und bleibt 26 x, so zählst du wieder die 2 zu den Gulden, und schreibest den Rest 26 unter die Kreuzer hin, so ist das ganze Product = 20 fl. 26 x. 1 pf.

80. Aufgabe. Zahlen von ungleicher Art dividiren.

Aufl. Wir wollen die Auflösung Deutlichkeit halber in dem vorhergehenden Beyspiel wieder vornehmen, und das gefundene Product 20 fl. 26 x. 1 pf. durch 3 dividiren.

1. Fang die Division bey der größten Gattung (hier bey den Gulden) an, und sage, 3 in 20 ist 6mal enthalten.

2. Schreib den Quotienten 6 am Platz der Gulden, weil aber 3 ⋈ 6 nicht 20, sondern = 18, und also 2 im Rest bleiben, zählst du 2 fl. das ist 120 Kreuzer zu den 26 x, und dividirst die Summe davon, nämlich 146 x wieder durch 3.

3. Schreib wieder den Quotienten 48 unter die Kreuzer: weil aber 3 ⋈ 8 nicht = 26 sondern nur = 24 ist, bleiben wieder 2 im Rest. Die 2 Kreuzer, oder 8 Pfenning, zähle zu der Gattung der Pfenninge, so hast du 9, die du wieder durch 3 dividirst, und den Quotienten 3 darunter schreibest.

Es ist also 20 fl. 26 x. 1 pf. dividirt durch 3 = 6. 48. 3.

81. Anmerkung. Es giebt freylich noch eine andere Art, diese Multiplication sowohl, als Division vorzunehmen, wenn man nämlich die höchste Gattung auf die kleinste reducirt, das ist: wenn man z. B. die Gulden zu Kreuzer, und wieder die Kreuzer zu Pfenninge macht. Allein, weil nach vollendeter Operation erst alle Gattungen wieder in ihre Klassen gebracht werden müssen, kömmt mir diese Art zu rechnen viel zu verdrüßlich vor, als daß ich sie einem Anfänger gerne rathen wollte.

Etwelche Uebungen über diesen Absatz.

82. Ich hab 7 Tagwerker: jedem muß ich die Woche 2 fl. 48 x. 3 pf. bezahlen. Wie viel habe ich am Ende der Woche Geld hierzu nöthig?

	fl.	x.	pf.
	2.	48.	3.
			7
Antwort =	19.	41.	1.

83. In

83. In einem Hause wohnen 5 Familien, jede soll jährlich 2 fl. 30 x. 2 pf. 1 Häller Steur bezahlen. Wie viel muß der Hausherr einliefern?

	fl.	x.	pf.	häller.
	2.	30.	2.	1.
				5
Antwort	12.	33	—	1

84. Ich habe 23 Unterthanen: jeder soll mir am Korn liefern

	Scheffel.	Metzen.	Viertl.	Mäßl.
	5	4	1	3
Wie viel habe ich einzunehmen?				
Antwort	133	4	—	1

85. Ein reicher Herr vermacht im Testamente 12 armen Studenten 90 fl. 48 x. was bekömmt jeder?

Antwort 7 fl. 34 x.

Fünfter Abschnitt.

Von den gebrochenen Zahlen.

1. §.

Von der Natur und den Eigenschaften der Brüche.

86. Wenn wir ein Ganzes, z. B. einen

Gulden, oder eine Linie in wie viel immer gleiche Theile abtheilen, und einen oder mehr solche Theile nehmen, oder in die Rechnung bringen, nennen wir den Ausdruck davon eine Fraction, oder einen Bruch.

87. Gleichwie wir aber z. B. eine Linie in so viel Theile abtheilen können, als uns beliebig, jezt in 3, jetzt in 5, jezt in 17, jezt in 100 u. s. f. so giebt es unendlich viele verschiedne Gattungen der Brüche.

88. Jede Fraction wird durch zwo Zahlen ausgedrückt, deren eine oberhalb des Striches geschrieben, und der Zähler, die andere unterhalb, und der Nenner benamset wird. Dieser bestimmt es, in wie viel Theile man das Ganze getheilet: jener, wie viel solche Theile man nimmt. Z. B. Der Gulden soll in 3 gleiche Theile getheilt werden, und ich soll zween davon bekommen, so schreibe ich $\frac{2}{3}$.

89. Es ist demnach aus zwoen oder mehr Fractionen, die den nämlichen Nenner haben, jene die größte, welche den größten Zähler hat, also ist z. B. $\frac{4}{5}$ größer als $\frac{3}{5}$. Die Mathematicker schreiben dieß so: $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$. und wenn sie sagen wollen, $\frac{3}{5}$ ist kleiner als $\frac{4}{5}$, schreiben sie $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$.

Sind

Sind aber sowohl die Zähler, als die Nenner ungleich, und folglich die Brüche von verschiedner Art, wie z. B. $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{10}$ ꝛc. so ist jener grösser, dessen Zähler nicht so oft in dem Nenner enthalten ist; dahero $\frac{5}{10} > \frac{3}{9}$.

Ist aber dieß Verhältniß in zwoen oder mehr Fractionen gleich, so sind auch sie in ihrem Werthe gleich. Dahero z. B. $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ꝛc. und $\frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ꝛc.

90. Man sieht hieraus die Folge ohne meiner Erinnerung von sich selbst ein, daß, wenn man den Zähler sowohl, als den Nenner einer gegebenen Fraction durch die nämliche Zahl multiplicirt, oder dividirt, das Product, oder auch der Quotient der gegebenen Fraction wieder gleich werden müsse, so ist z. B. $\frac{3}{4}$ wenn ich den Nenner und Zähler durch 3 multiplicire $= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, und wieder $\frac{7}{21}$, wenn ich den Nenner und Zähler durch 7 dividire, $= \frac{1}{3} = \frac{7}{21}$.

91. Um sich einen deutlichen Begrif von den Fractionen zu machen, wollen wir die Linie A B nach und nach in verschiedene, aber jederzeit gleiche Theile, theilen. 6. Fig.
Wenn wir diese Figur betrachten, so werden wir wahrnehmen, I. daß zweymal der halbe, 3mal der dritte, viermal der vierte, 5mal der fünfte Theil u. s. f. ge-

nommen

nommen, jederzeit die ganze Linie AB ausmache, das ist, $\frac{2}{2} = 1$. $\frac{3}{3} = 1$. $\frac{4}{4} = 1$. $\frac{5}{5} = 1$. sey ꝛc. Ist dahero jede Fraction, deren Zähler dem Nenner gleich ist, ein Ganzes.

92. **Anmerkung.** Nun wird es einem Anfänger kein Geheimniß mehr seyn, wenn man ihn z. B. 23 durch lauter Zweyer, 34 durch lauter Dreyer, 45 durch lauter Vierer, 100 durch lauter Neuner, u. s. f. schreiben heisset. Denn es ist $23 = 22 + \frac{2}{2}$. $34 = 33 + \frac{3}{3}$. $45 = 44 + \frac{4}{4}$. $100 = 99 + \frac{9}{9}$. ꝛc.

93. Wir werden IItens wahrnehmen, daß ein Theil Ca der in zween Theile getheilten Linie CD eben so viel ausmache, als zween Theile der Linie GH, die in 4 Theile getheilt ist; und eben so viel, als drey Theile der Linie LM, die in 6, oder als vier Theile der Linie PQ, die in 8, oder als fünf Theile der Linie TV, die in 10, oder als sechs Theile der Linie YZ, die in 12 getheilt ist, u. s. f. ohne Ende.

Eben so wird man in dieser Betrachtung sehen, daß ein Theil der in 3 getheilten Linie EF genau zweenen Theilen der in 6 getheilten Linie LM, oder 3 Theilen der in 9 getheilten Linie RS oder 4 Theilen der in 12 getheilten Linie YZ u. s. f. gleich sey.

94. Es sind demnach die Fractionen $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{4}$. $\frac{3}{6}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{5}{10}$. $\frac{6}{12}$. $\frac{7}{14}$. $\frac{8}{16}$. $\frac{9}{18}$. $\frac{10}{20}$. u. s. f.

alle einander gleich, weil in einer jedwedern der Zähler in seinem Nenner zweymal, und folglich eben so oft enthalten ist.

So ist auch $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \frac{8}{24} = \frac{9}{27}$ rc. rc. obschon die Zahlen selber, wodurch diese Fractionen ausgedrückt werden, nicht einander gleich sind, sondern immerzu grösser werden.

95. Nun ist gewiß, daß man mit einer Fraction, die durch kleinere Zahlen ausgedrückt ist, im rechnen jederzeit leichter fortkomme, als mit eben derselbigen Fraction, wenn sie aus grossen Zahlen bestehet, und werden z. B. die arithmetischen Operationen weit leichter mit $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, als mit $\frac{16}{32}$ und $\frac{9}{27}$ vorgenommen, obschon diese jenen am Werthe vollkommen gleich sind. Man muß dahero, wenn solche Brüche vorkommen, sie zu reduciren wissen, das ist, man muß andere dafür finden, die den gegebenen gleich sind, aber aus kleinern Zahlen bestehen.

96. **Aufgabe.** Eine gegebene Fraction durch kleinere Zahlen ausdrücken, z. B. $\frac{40}{96}$.

Aufl. Man dividire sowohl den Zähler (40) als den Nenner (96) durch die nämliche Zahl (8) so wird der erste Quotient (5) den Zähler, der zweyte (12) den Nenner der neuen Fraction ($\frac{5}{12}$) geben, und ist $\frac{40}{96} = \frac{5}{12}$.

97.

97. Wir werden aber in Betrachtung unserer Linie IIItens wahrnehmen, daß, wenn wir z. B. die in 12 Theile getheilte Linie her: und davon 7 Theile nehmen, diese $\frac{7}{12}$ keinem Theile aus allen vorgehenden Linien gleich seyn, und hiemit der Bruch $\frac{7}{12}$ ohnmöglich durch kleinere Zahlen könne ausgedrückt werden. Und so giebt es eine Menge Fractionen, die wir nimmer auf kleinere Zahlen reduciren können.

98. Anmerkung. Die Erfahrung hat michs gelehret, daß ein Anfänger die größte Beschwerniß fühle, wie er denn diejenige Zahl finden solle, damit er den Zähler sowohl als den Nenner der Fractor ohne Rest dividire, oder woraus er es abnehmen könne, daß die Reduction ohnmöglich sey?

Ich gab bisher meinen Schülern hierüber folgende Regeln.

I. Wenn sowohl im Zähler als im Nenner der Fraction die letzte Zahl eine Nulle (0) ist, können beyde durch 10 oder auch durch 5 dividirt werden. Z. B. $\frac{120}{340} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$.

II. Wenn die letzte Zahl in beyden (5) heisset, ist der Divisor, oder das gemeine Maas (5.) Z. B. $\frac{375}{625} = \frac{75}{125} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

III. Wenn am Ende des Zählers sowohl als des Nenners eine gerade Zahl steht, als: 2, 4,

2, 4, 6, 8, 0 kann man beyde so lang halbiren, bis man auf den kleinsten Ausdruck kömmt. So ist z. B.

$\frac{192}{256} = \frac{96}{128} = \frac{48}{64} = \frac{24}{32} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

IV. So thut auch das Verzeichniß der sogenannten Primzahlen, die uns **Peter Jäger** von 1 bis 1000000 ausgerechnet hinterlassen, und **Johann Krüger** am Ende seiner Gedanken von der Algebra beygesetzt, hier seine Dienste; denn Primzahlen werden diejenigen genennet, die sich in keine Factores zerfällen lassen, durch deren Multiplication sie entstehen können. Wenn also der Zähler, oder der Nenner einer Fraction eine solche Primzahl ist, wird die Bemühung, sie durch kleinere Zahlen auszudrücken, vergebens seyn.

In allen übrigen Fällen, um das allgemeine Maaß des Zählers sowohl, als des Nenners zu finden, verfährt man so:

1. Man dividirt den Nenner durch den Zähler. Bleibt nun kein Rest über, so ist der Zähler das allgemeine Maaß, oder die Zahl, durch welche beyde dividirt werden können, und die beyden Quotienten werden die neue Fraction geben, die der vorigen gleich ist. So wird z. B. $\frac{7}{63}$ auf den kleinsten Ausdruck reducirt,

97. Wir werden aber in Betrachtung unserer Linie IIItens wahrnehmen, daß, wenn wir z. B. die in 12 Theile getheilte Linie her- und davon 7 Theile nehmen, diese $\frac{7}{12}$ keinem Theile aus allen vorgehenden Linien gleich seyn, und hiemit der Bruch $\frac{7}{12}$ ohnmöglich durch kleinere Zahlen könne ausgedrückt werden. Und so giebt es eine Menge Fractionen, die wir nimmer auf kleinere Zahlen reduciren können.

98. Anmerkung. Die Erfahrung hat michs gelehret, daß ein Anfänger die größte Beschwerniß fühle, wie er denn diejenige Zahl finden solle, damit er den Zähler sowohl als den Nenner der Fractor ohne Rest dividire, oder woraus er es abnehmen könne, daß die Reduction ohnmöglich sey?

Ich gab bisher meinen Schülern hierüber folgende Regeln.

I. Wenn sowohl im Zähler als im Nenner der Fraction die letzte Zahl eine Nulle (0) ist, können beyde durch 10 oder auch durch 5 dividirt werden. Z. B. $\frac{120}{340} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$.

II. Wenn die letzte Zahl in beyden (5) heisset, ist der Divisor, oder das gemeine Maas (5.) Z. B. $\frac{375}{625} = \frac{75}{125} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

III. Wenn am Ende des Zählers sowohl als des Nenners eine gerade Zahl steht, als:

2, 4, 6, 8, 0 kann man beyde so lang halbiren, bis man auf den kleinsten Ausdruck kömmt. So ist z. B.

$$\frac{192}{256} = \frac{96}{128} = \frac{48}{64} = \frac{24}{32} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

IV. So thut auch das Verzeichniß der sogenannten **Primzahlen**, die uns **Peter Jäger** von 1 bis 1000000 ausgerechnet hinterlassen, und **Johann Krüger** am Ende seiner Gedanken von der Algebra beygesetzt, hier seine Dienste; denn **Primzahlen** werden diejenigen genennet, die sich in keine Factores zerfällen lassen, durch deren Multiplication sie entstehen können. Wenn also der Zähler, oder der Nenner einer Fraction eine solche Primzahl ist, wird die Bemühung, sie durch kleinere Zahlen auszudrücken, vergebens seyn.

In allen übrigen Fällen, um das allgemeine Maaß des Zählers sowohl, als des Nenners zu finden, verfährt man so:

1. Man dividirt den Nenner durch den Zähler. Bleibt nun kein Rest über, so ist der Zähler das allgemeine Maaß, oder die Zahl, durch welche beyde dividirt werden können, und die beyden Quotienten werden die neue Fraction geben, die der vorigen gleich ist. So wird z. B. $\frac{7}{63}$ auf den kleinsten Ausdruck reducirt,

wenn wir 63 durch 7 dividiren; denn weil 7 in 63 9mal enthalten, und kein Rest bleibt, so ist der Zähler 7 die gesuchte Zahl. Es ist aber $\frac{7}{7} = 1$, und $\frac{63}{7} = 9$. Dahero $\frac{7}{63} = \frac{1}{9}$.

2. Bleibt aber ein Rest, so wird durch eben diesen Rest der vorhergehende Divisor wieder dividirt, und dieß so lang, bis nichts mehr übrig bleibt. Der letzte Divisor wird alsdenn die gesuchte Zahl seyn, womit der Zähler und der Nenner deiner Fraction dividirt werden muß, um sie auf den kleinsten Ausdruck zu bringen.

Beyspiel. Wir sollen den kleinsten Ausdruck der Fraction $\frac{255}{663}$ finden.

So dividiren wir 663 | 2
durch 255
510
Rest = 153

Nun wird der vorige Divisor 255 | 1
dividirt durch den Rest 153
Rest = 102

wieder der vorige Divisor 255 | 2
dividirt durch den Rest 102
204
Rest = 51

Nochmal der Divisor 255 | 5
dividirt durch den Rest 51
255
0

Es

Es ist folglich der letzte Divisor, oder der letzte Rest 51 das allgemeine Maaß der Fraction, oder die Zahl, durch welche wir den Zähler und den Nenner unserer gegebenen Fraction $\frac{255}{663}$ ohne Rest dividiren können, um sie aufs kürzeste auszudrücken. Denn $\frac{255}{51} = 5$. und $\frac{663}{51} = 13$. Dahero $\frac{255}{663} = \frac{5}{13}$.

Eben so wird man finden $\frac{252}{315} = \frac{4}{5}$. $\frac{189}{513} = \frac{7}{19}$. $\frac{481}{629} = \frac{13}{17}$. $= \frac{171}{399} = \frac{3}{7} = \frac{83}{415} = \frac{1}{5}$. u. s. f.

Noch eine andere, und in großen Zahlen bequemere Art giebt es, die ich durch folgendes Beyspiel erkläre.

Man soll für die Fraction $\frac{91}{294}$ den allgemeinen grösten Divisor finden, so ist die Operation folgende.

1. Man dividire den Nenner 294 durch den Zähler 91. so wird (ohne auf den Quotienten acht zu haben,) 21 im Reste bleiben.

2. Man dividire also wiederum den vorigen Divisor 91 durch den erstern Rest 21, so ist der zweyte Rest $= 7$.

3. Durch diesen zweyten Rest 7 dividire man den erstern Rest 21, so wird der Quotient $= 3$ seyn, und kein Rest mehr bleiben. Es ist dahero 7 der gemeine gröste Divisor der gegebenen Fraction, und folglich $\frac{91}{294} = \frac{13}{42}$.

Kurz: man dividirt den erstern Rest durch den zweyten, den zweyten durch den dritten, diesen durch den vierten u. s. f. Derjenige Rest, durch welchen der vorhergehende genau oder ohne neuen Rest kann dividirt werden, ist der gemeine Divisor.

Ists aber eine Fraction, die nicht kann reducirt werden, so wird endlich der letzte Rest = 1 werden, weil 1 der gemeine Divisor aller Zahlen ist.

99. **Anmerkung.** Weil in den gemeinen Rechnungen dergleichen Fractionen nicht selten vorkommen, die, wenn sie aus grossen Zahlen bestehen, die Rechnung verwirrt, und eben darum verdrüßlich machen, wird nöthig seyn, daß sich ein Anfänger in diesen und dergleichen Beyspielen fleißig übe, um eine ungehinderte Fertigkeit in dieser Art zu reduciren zu erlangen.

100. Wenn der Zähler einer Fraction grösser ist, als ihr Nenner, wird sie ein **Afterbruch** (fractio spuria) genennet, und ist jederzeit einem oder mehr ganzen, zuweilen noch überdas etwelchen Theilen des Ganzen gleich. z. B. $\frac{9}{3} = 3$. $\frac{8}{2} = 4$. $\frac{12}{9} = 1\frac{1}{3}$. $\frac{241}{140} = 1\,\frac{101}{140}$ rc.

101. Um also, was immer für eine ganze Zahl zu einer Fraction zu machen, darf man nur 1 unter sie hinschreiben, so ists geschehen; denn

denn es ist $6 = \frac{6}{1}$ ꝛc. und diese Reduction hat zuweilen ihre Vortheile, wie wir bald sehen werden.

102. **Anmerkung.** Weil zwo oder mehr Fractionen, wenn sie verschiedne Nenner haben, Zahlen von ungleicher Art sind, um die Addition oder Subtraction damit vorzunehmen, müssen sie zuvor unter den nämlichen Nenner gebracht, oder, was eben so viel heisset, in Zahlen von gleicher Art verwandelt werden.

103. **Aufgabe.** Zwo oder mehr Fractionen unter den nämlichen Nenner bringen.

Aufl. Wenn es nur zwo sind, so multiplicirt man sowohl den Zähler, als den Nenner der erstern durch den Nenner der zweyten; und sowohl den Zähler als den Nenner der zweyten durch den Nenner der ersten. Z. B. $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ soll ich unter den nämlichen Nenner bringen, so schreibe ich $\frac{3}{5} \times 7$, $\frac{2}{7} \times 5$

$$= \frac{21}{35}, \quad \frac{10}{35}$$

104. Sind aber drey, vier, oder mehr Fractionen zu reduciren, so multiplicirt man den Zähler und Nenner einer jeden Fraction insonderheit durch das **Product**, welches entstehet, wenn man die Nenner aller übrigen Brüche durcheinander multiplicirt. Z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ sollen unter einen Nenner gebracht werden, so

sage ich: $5 \times 7 = 35$ damit multiplicire ich $\frac{1}{3}$
$3 \times 7 = 21$ „ „ „ $\frac{2}{5}$
$3 \times 5 = 15$ „ „ „ $\frac{3}{7}$

So bekomme ich für $\frac{1}{3}$: $\frac{35}{105}$
„ „ $\frac{2}{5}$: $\frac{42}{105}$
„ „ $\frac{3}{7}$: $\frac{45}{105}$

105. **Aufgabe.** Jede ganze Zahl (4) in eine Fraction eines gegebenen Nenners (3) verwandeln.

Aufl. Multiplicire die gegebene Zahl (4) durch den gegebenen Nenner (3). Unter das Product schreib den gegebenen Nenner, so ists geschehen; denn es ist $3 \times 4 = 12$, und $\frac{12}{3} = 4$.

106. **Aufgabe.** Eine gemischte Zahl, das ist, eine ganze Zahl, die aber eine Fraction neben sich stehen hat, in einen Bruch des nämlichen Werths und Nenners verwandeln.

Aufl. Es sey die gegebene Zahl $9\frac{2}{5}$. Multiplicire die ganze Zahl 9 durch den Nenner 5 der beygesetzten Fraction.

Zum Product 45 addire den Zähler (2) der nämlichen Fraction, so bekömmst du $45 + 2 = 47$. Nun schreibe den Nenner der vorigen Fraction darunter, so hast du $\frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5}$.

2. §.

Von den arithmetischen Operationen in gebrochenen Zahlen.

Anmerkung. Daß, und wie sich die im dritten Abschnitte angebrachten deutlichen Begriffe oder Definitionen auch auf die Operation in gebrochenen Zahlen erstrecken, wollte ich Kürze halber der mündlichen Erklärung überlassen.

107. Aufgabe. Zween oder mehr Brüche addiren.

Aufl. Wenn die gegebenen Brüche von ungleicher Art sind, das ist, wenn sie nicht einerley Nenner haben, bringe man sie unter einerley Nenner. (n. 103.)

2. Addire man die Zähler, und schreibe unter ihre Summe den allgemeinen Nenner hin.
Z. B. $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$

108. Aufgabe. Zween Brüche von einander subtrahiren.

Aufl. Man bringe sie, wie zuvor, unter einerley Nenner.

2. Ziehe man den kleinern Zähler von den grössern ab, und schreibe unter den Rest den allgemeinen Nenner hin.

Z. B. $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{1}{35}$.

109. Aufgabe. Zween oder mehr Brüche durcheinander multipliciren.

Aufl. Man multiplicire die Zähler besonders, und die Nenner der gegebenen Brüche wieder besonders durcheinander, (wenn sie auch schon von ungleicher Art wären,) und schreibe unter das Product der Zähler das Product der Nenner hin.

Z. B. $\frac{1}{3} \bowtie \frac{2}{5} \bowtie \frac{3}{4} = \frac{6}{60}$. Denn wenn ich sage, ich hab $\frac{1}{3} \bowtie \frac{2}{5} \bowtie \frac{3}{4}$ von einem Gulden, ist es eben so viel, als wenn ich sagte: von $\frac{1}{3}$ eines Guldens, das ist, von 20 kr. hab ich $\frac{2}{5}$ oder 2mal den fünften Theil, folglich hab ich 8 kr. und von diesen 8 kr. hab $\frac{3}{4}$ oder 3mal den vierten Theil; folglich hab ich zuletzt 6 kr. $= \frac{6}{60}$ eines Guldens.

110. Aufgabe. Eine Fraction durch eine ganze gegebene Zahl multipliciren.

Aufl. Man multiplicire durch die gegebene Zahl den Zähler der Fraction, und schreibe den unveränderten Nenner darunter.

Z. B. $\frac{2}{19} \bowtie 3$ ist $= \frac{6}{19}$. Denn 3 ist $= \frac{3}{1}$ und wenn wir nun die Brüche $\frac{2}{19}$, $\frac{3}{1}$ durcheinander multipliciren, kömmt (nach der vorgehenden Aufgabe) $\frac{6}{19}$ heraus.

111. Auf-

111. Aufgabe. Eine Fraction durch die andere dividiren.

Aufl. Kehre den Divisor um; das ist, mache seinen Zähler zum Nenner, und den Nenner zum Zähler, alsdann multiplicire die zwo Fractionen (wie n. 109.)

Z. B. Ich soll $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{9}$ dividiren, so schreibe ich $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{2}$. Nun ist $\frac{3}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$. Um den Beweis davon begreiflich zu machen, wollen wir $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}$ dividiren. Es ist richtig, daß $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ einmal enthalten. Nun aber ist ja $\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{2} = 1$.

112. Aufgabe. Eine Fraction durch eine gegebene ganze Zahl dividiren.

Aufl. Man multiplicire den Nenner der Fraction durch die gegebene ganze Zahl, und schreibe den unveränderten Zähler darüber hin.

Z. B. Ich soll $\frac{2}{3}$ durch 5 dividiren, so wird der Quotient $= \frac{2}{15}$ seyn. Denn es ist $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} : \frac{5}{1}$. Wenn wir also der vorhergehenden Aufgabe nachkommen, müssen wir den Divisor $\frac{5}{1}$ umkehren, und $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{5}$ multipliciren, wovon das Product $= \frac{2}{15}$ ist.

Sechster Abschnitt.

Von Ausziehung der Quadrat und Cubic-Wurzeln aus ganzen und gebrochenen Zahlen.

1. §.

Vorläufige Erinnerungen.

113. Wenn man was immer für eine Zahl, z. B. 3, durch sich selber multiplicirt, so nennt man das Product (9) ein **Quadrat**: die Zahl 3 aber heisset in Ansehung dieses Quadrats die **Quadrat-Wurzel**.

Multiplicirt man das Quadrat (9) noch einmal durch seine Wurzel (3), so heisset das Product (27) ein Cubus, oder Cubic-Zahl, und in Ansehung des Cubus heisset die Zahl 3 die Cubic-Wurzel.

114. Es heisset demnach die Quadrat-Wurzel aus einer gegebenen Zahl (9) ausziehen, eben so viel, als diejenige Zahl finden, welche durch sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl (9) hervorbringet, wie in unsrem Beyspiel die Zahl 3 ist.

115. Die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl (27) ausziehen, heisset, diejenige Zahl finden, (nämlich hier 3) die durch ihr Quadrat (9) multiplicirt die gegebene Zahl (27) hervorbringet.

116. Lehr-

116. Lehrsatz. Jedes Quadrat, dessen Wurzel aus zweenen Theilen (z. B. 10 † 2.) bestehet, enthält in sich das Quadrat des ersten Theils (10): das Quadrat des zweyten Theils (2) und das Product aus dem ersten Theil (10) in den andern (2) zweymal genommen.
Z. B. 10 † 2 = 12, und 12 ⋈ 12 = 144
Es ist aber auch 100 das Quadrat des ersten Theils.
20 das Product aus dem 1sten Th.
20 in dem andern zweymal.
4 das Quadrat des zweyten Theils
zusam addirt = 144. w. z. E.

117. Anmerkung. Wenn die Wurzel mehr als zween Theile hat, wie z. B. 265. 2c. so darf man nur zwo, oder mehr Zahlen davon für eine ansehen, so kann sie leicht auf eine Wurzel, die aus zweenen Theilen besteht, reducirt, und das Quadrat davon nach dem vorhergehenden Lehrsatz betrachtet werden. Z. B. 265 = 200 † 65. oder 260 † 5 u. s. von andern.

118. Lehrsatz. Jeder Cubus, dessen Wurzel aus zweenen Theilen bestehet, (z. B. 10 † 2) enthält in sich den Cubus sowohl des erstern (10) als des andern Theils (2) und überdas das Product aus den Quadraten jedes Theils in den andern Theil dreymal genommen.
Z. B. 10 † 2 = 12. 12 ⋈ 12 = 144: 144 ⋈ 12 = 1728.

Es

Es ist aber auch 1000 der Cubus des ersten Theils
600 das Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den andern dreymal.
120 das Product aus dem Quadrat des zweyten Theils in den ersten Theil dreymal.
8 der Cubus des 2ten Theils.

zusam̃ addirt 1728. w. z. E.

119. **Anmerkung.** Wenn die Wurzel aus mehr als zween Theilen besteht, verfährt man wie oben n. 117.

2. §.

Von Ausziehung der Quadratwurzel.

120. Um diese arithmetische Operation vorzunehmen, müssen uns alle Quadrate und Cubi von den ersten 9 einfachen Zahlen bekannt seyn. Hier stehen sie.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

121. **Aufgabe.** Aus einer gegebenen Zahl (1444) die Quadratwurzel ausziehen.

Aufl. 1. Theile die gegebene Zahl von der rechten Hand zur linken in Classen ab, und gieb jeder Classe zwey Ziffern: In der letzten

Classe mag wohl auch nur ein Ziffer stehen. So viel du Classen in der gegebenen Zahl zählest, so viel Theile wird die Wurzel haben. Weil also unsre Zahl 14,44 zwo Classen giebt, hat die Wurzel zween Theile oder Ziffern.

2. Frage: Ist die erste Claß 14 ein Quadrat? Antw. Nein; denn sie steht unter den Quadraten der Tabelle nicht.

3. Suche in der Tabelle ein Quadrat, welches zwar kleiner als 14, doch dieser Zahl am nächsten kömmt: Du findest 9. Schreib also 9 unter die Zahl 14 hin, die Wurzel von 9 aber, nämlich 3 schreib am Platz des Quotientens hinter dem Striche, wie beym dividiren.

```
14,44 | 38
 9    |
----
 5 44
   68
 5 44
--------
    0
```

4. Zieh das Quadrat (9) von der ersten Classe (14) ab, und setze zum Rest die neue Claß (44) herunter.

5. Duplire den gefundenen Quotienten, oder die Wurzel (3) und fang das Product (wenn es etwan aus mehr Zahlen bestünde,) unter

unter die linke Zahl der neuen Classe (44) zu schreiben an, wie hier 6 unter dem linkē vierer steht.

6. Frage, wie oft 6 in 54 enthalten sey, und den Quotienten (8) schreib zugleich sowohl am Platz des Quotientens, als unter die letzte Zahl der neuen Classe. Multiplicire durch den gefundenen Quotienten (8) wie beym Dividiren, die Zahl (68), und subtrahire das Product von den obern Zahlen 544. hier bleibt kein Rest: ist also die Quadratwurzel von 1444 = 38.

122. Anmerkung. Das Zeichen der Quadratwurzel sieht bey den Mathematickern so aus: $\sqrt{}$ Dahero z. B. $\sqrt{357}$ eben so viel heisset, als, man soll aus der Zahl 357 die Quadratwurzel ausziehen.

123. Anmerkung. Wenn die gegebene Zahl drey, vier, oder mehr Classen hat, darf man nur jederzeit die n. 5. und n. 6. angebrachte Regeln wiederholen, und wohl merken, daß man (n. 5.) nicht nur jederzeit den letzten, sondern den Ganzen bisher gefundenen Quotienten, aus so viel immer Ziffern er bestehen möge, dupliren müsse.

124. Wenn eine gegebene Zahl kein wahres Quadrat ist, kann eben darum auch ihre wahre Wurzel nicht genau bestimmet werden. Doch kann man sie beynahe, ja immerzu näher finden, wenn man zum letzten Rest 2 oder 4 Nullen setzet, und nach der Vorschrifft der 5ten und 6ten Regel zu rechnen fortfährt. Die Quotienten,

die

die aus dieser neuen Rechnung entstehen, geben lauter decimal Fractionen, das ist 10te Theilgen, oder 100te Theilgen, nachdem man zwey, oder vier Nullen hinzugesetzt.

Beyspiel. Ich soll aus 567 die Quadrat-Wurzel ausziehen, so sieht die Rechnung so aus.

```
5,67  | 23 811/1000
4
167
 43
129
 3800
  468
 3744
   5600
   4761
     83900
     47621
     36279 u.s.f.
```

125. Will man die Probe über seine Rechnung machen, darf man nur die gefundene Wurzel, als im letzten Beyspiele 23 durch sich selber multipliciren, und zum Product 529 den Rest 38 addiren, der geblieben, ehe man die Nullen beygesetzt. Denn es ist 529 + 38 = 567 der gegebenen Zahl: hiemit ist die Rechnung richtig.

Anmerk.

Anmerk. Will man aus einer Fraction die Quadratwurzel ausziehen, muß sie sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner gezogen werden. Es ist demnach $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ und $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$ rc.

3. §.

Von Ausziehung der Cubicwurzel.

126. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl (54872) die Cubicwurzel ausziehen.

Aufl. 1. Theile die gegebene Zahl in Classen ab, und gieb jeder Classe 3 Ziffern von der linken Hand zur rechten. In der letzten mögen zuweilen auch nur zwey Ziffern stehen. so: 54,872. So viel du Classen zählest, so viele Theile wird die Wurzel haben.

2. Frage: ist die erste Classe (54) ein Cubus? Antw. Nein; denn sie steht unter den Cubic-Zahlen der Tabelle nicht. Suche also in der Tabelle einen Cubus, der kleiner ist, als 54, ihm aber am nächsten kömmt. Du findest 27. Schreib also 27 unter 54 hin, und subtrahire. Die Cubicwurzel von 27 aber, nämlich 3 schreib am Platz des Quotienten, so hast du den ersten Theil der Wurzel.

```
54, 872 | 3
27
------
27 872
```

3. Zum

3. Zum Rest 27 setze die neue Claß 872 herunter: und schreib linker Hand unter das erste Ziffer dieser neuen Classe, nämlich unter 8 das triplirte Quadrat der bishero gefundenen ganzen Wurzel (3): (wenn sie auch schon aus mehr Ziffern bestünde:) nämlich 3 ⋊ 3 = 9. 3 ⋊ 9 = 27. und dividire durch dieß triplirte Quadrat 27 die oberhalb geschriebene Zahlen, so wird der Quotient (8) der zweyte Theil der gesuchten Wurzel seyn, den du zu der vorher gefundenen wieder am Platz des Quotienten setzest. So: 54872 | 38

27

27872

27

4. Durch diesen wieder gefundenen Theil (8) multiplicire das triplirte Quadrat (27) der schon zuvor gefundenen ganzen Wurzel (3) (aus so viel Zahlen sie immer bestehen mag,) und schreib das Product 216 so unter die neue Claß (872), daß das letzte Ziffer des Products 6 unter das erste der neuen Claß 8 zu stehen komme. 54872 | 38

27

27872

216

5. Multiplicire nun den neu gefundenen Theil 8 durch sich selbst, das Product aber 64 durch 3 so bekömmst du das triplirte Quadrat vom neugefundenen Theil 8 = 192. Durch dieß multiplicire die schon zuvor gefundene Wurzel 3 (die ganze nämlich, wenn sie auch aus mehr Ziffern bestünde,) und schreib das Product (576) eben unter die mittlere Zahl der neuen Classe, nämlich hier unter 7 und weiter gegen der linken fort. So:

```
54,872 | 38
27
-----
27872
216:
576
```

6. Endlich suche in der Tabelle den Cubus von 8, als des letztgefundenen Theils deiner Wurzel 512, und schreib ihn rechter Hand unter das äusserste Ziffer der neuen Classe, nämlich hier unter 2. So:

```
54872 | 38
27
-----
27872
216::
576:
512
-----
27872
```

Addire die drey letztern Producte, und subtrahire die Summe von den gerad oberhalb geschriebenen Cubiczahlen. In unserm Beyspiele bleibt kein Rest

7. Wenn drey, vier, oder mehr Classen vorhanden, setzt man zum Rest die neue Claß,

und

und wiederholet die n. 3. 4. 5. und 6 vorgeschriebene Regeln, bis keine Classe mehr übrig.

Anmerkung. Das Zeichen der Cubicwurzel sieht so aus: $\sqrt[3]{}$

127. Wenn die gegebene Zahl kein wahrer Cubus ist, um der wahren Wurzel näher zu kommen, setzt man (wie oben bey der Quadratwurzel zwey oder vier) drey, sechs, oder neun Nullen hinzu, und operirt nach den n. 3. 4. 5. und 6. vorgeschriebenen Regeln, so bekömmt man die Zehnte, oder die Hunderte, oder tausendste Theile.

128. Will man die Probe über seine Rechnung machen, darf man nur die gefundene Wurzel (38) durch sich selbst, und das Product (1444) wieder durch die Wurzel (38) multipliciren, und den Rest, wenn solcher vorhanden, dazu addiren, so muß die gegebene Zahl heraus kommen, mit allen Nullen, die man beygesetzt.

129. Will man aus einer Fraction die Cubicwurzel ausziehen, muß sie aus dem Zähler sowohl, als aus dem Nenner gezogen werden. Dahero $\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7}$.

130. **Anmerkung.** Ich muß es bekennen, diese Arbeit ist für einen Anfänger sehr beschwerlich und verdrüßlich, theils wegen den immer-

während den triplirten und multipliciren, theils und besonders, weil ers sogar nicht errathen kann, wie oft die Producte in den ober ihnen geschriebenen Zahlen enthalten seyn. Allein diese Arbeit ist unentbehrlich; und der Anfänger muß sich gleichwohl entschliessen, sie so oft vor sich zu nehmen, bis sie ihm die wiederholte Uebung leicht, und angenehm machet, wenn er anderst in den nachfolgenden Stücken seiner Arithmetick nicht will stecken bleiben.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnißen und Proportionen.

131. Wenn wir fragen, welche aus zwoen Zahlen z. B. 4 und 12 größer oder kleiner sey, als die andere, und sie folglich durch die Subtraction miteinander vergleichen, nennen wir dieß ein **arithmetisches Verhältniß**, und schreiben 12 — 4 = 8. oder auch 4 : 12 = 8.

132. Wenn wir aber fragen, wie oft die kleinere aus zwoen Zahlen 4 und 12 in der größern enthalten, und sie also durch die Division vergleichen, wird diese Vergleichung ein **geometrisches Verhältniß** genennet, und so geschrieben, 4 : 12 = 3.

133. Wenn

133. Wenn in zweyen, oder mehr arithmetischen Verhältnißen die Differenz, in geometrischen aber der Quotient, oder, welches hier eben so viel heisset, der Exponent einerley ist, so sind sie ähnliche, oder gleiche Verhältniße, deren zwey eine Proportion ausmachen.

Die arithmetische Proportion wird so ausgedrückt

7 . 9 = 12 . 14. oder 7 . 9 : : 12 . 14
oder 9 — 7 = 14 — 12

Die geometrische aber so 3 : 12 = 1 : 4.
oder 3 : 12 : : 1 : 4.

134. Wenn das zweyte Glied zugleich die Stelle des dritten vertritt, wird es Proportio continua, eine ununterbrochene Proportion genennt, und die arithmetische so ausgedrückt ÷ 7 . 9 . 11. Die geometrische aber so ÷ 2 . 4 . 8. Das ist: wie sich das erste Glied zum zweyten, so verhält sich das zweyte zum dritten.

Lehrsatz. In jeder arithmetischer Proportion ist die Summe der beyden äußersten Glieder der Summe der zwey mittlern gleich, oder, in einer ununterbrochenen Proportion dem mittlern zweymal genommen.

Beyspiel. $7 \,.\, 9 = 12 \,.\, 14$

Nun ist $7 + 14 = 9 + 12$

Und wieder $\div\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11$

Nun ist $7 + 11 = 2 \times 9 = 18$

136. **Lehrsatz.** In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äussersten zwey Glieder dem Producte der zwey mittlern, oder, in der **ununterbrochenen** Proportion, dem Quadrate des mittlern Gliedes gleich.

Beyspiel. $1 : 4 = 3 : 12$

Nun ist $1 \times 12 = 4 \times 3$

Und wieder $\div\!\!\div\, 2 \,.\, 4 \,.\, 8 \,.$

Nun ist $2 \times 8 = 4 \times 4 = 16.$

137. **Anmerkung.** Ich habe den Beweis dieser zween Lehrsätze hier nicht hersetzen wollen, weil ich in meiner Algebra weitläufig von den Proportionen gehandelt, wo die Beweise solcher Lehrsätze, weil sie allgemein sind, viel deutlicher können angebracht werden, und es für einen Studenten, für die ich schreibe, früh genug seyn wird, wenn er die Beweise dessen, was er jetzt in den untern Schulen praktisch erlernet, beym Eingang seiner Mathematick einsiehet.

138. **Aufgabe.** Zwischen zwoen gegebenen Zahlen, z. B. 9 und 13 die mittlere arithmetische Proportionalzahl finden.

Aufl. Addire die zwo gegebenen Zahlen (9 + 13) die Summe (22) dividire durch 2, so wird der Quotient (11) die gesuchte mittlere Proportionalzahl seyn.

Anmerkung. Und dieß ist endlich die ganze Rechnung, die einem Visier zu wissen nöthig, um sich, statt der in unsern Landen so unrichtigen Cubicruthe, im Visiren der Quadratruthe bedienen zu können. Ich wollte diese Anmerkung nicht weglassen, weil sich unsre Herren Visiers, vermuthlich aus Forcht, sie müßten in ihren alten Tagen noch rechnen lernen, über die vor ein paar Jahren von höchsten Orten billigst anbefohlne Abänderung der Cubic- in die Quadratruthe, beschwert und entschuldiget haben.

139. Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen (5. 12. 9.) die vierte arithmetische Proportionalzahl finden.

Aufl. Von der Summe der zweyten und dritten 12 + 9 zieh die erste (5) ab. Der Rest ist die gesuchte Zahl

$$12 + 9 = 21. \quad 21 - 5 = 16.$$

Ist also $5 - 12 = 9 - 16$

140. Aufgabe. Zwischen zwoen gegebenen Zahlen (8 und 72) die mittlere geometrische Proportionalzahl finden.

Aufl. Multiplicire die beyden gegebenen Zahlen durcheinander. 8 ⋈ 72.

2. Aus dem Product (576) zieh die Quadratwurzel aus, diese (24) wird die gesuchte mittlere Proportionalzahl seyn. Denn es ist ∺ 8 : 24 : 72.

141. **Aufgabe.** Zu zwo gegebenen Zahlen die dritte, oder zu drey die vierte geometrische Proportionalzahl finden.

Aufl. Multiplicire im ersten Falle die zweyte durch sich selbst: im andern Falle die zweyte durch die dritte, und dividire jederzeit das Product durch die erste, so ist der Quotient die gesuchte Zahl.

Beyspiel. Ich soll zu 3 und 9 die dritte finden, so sag ich: 9 ⋈ 9 = 81. $\frac{81}{3}$ = 27. Hier steht sie.

Ich soll zu 5, 15, 9 die vierte finden, so sage ich: 15 ⋈ 9 = 135. $\frac{135}{5}$ = 27. Hier ist sie.

142. **Anmerkung.** Die Auflösung dieser letztern Aufgabe ist eigentlich die sogenannte Regel Detri, der wir so manche Vortheile in dem gemeinen Leben, und tausend nützlichste Erfindungen in allen Wissenschaften zu verdanken haben. Ich will dahero von dieser noch eine Abhandlung hersetzen.

Achter Abschnitt.

Von der sogenannten Regel Detri.

1. §.

Von dieser Regel überhaupt.

143. Diese Regel kann nur in jenen Rechnungen angebracht werden, in denen eine geometrische Proportion vorkömmt, als z. B. im gemeinen Handel, wo der Werth jederzeit mit der Waare in Proportion stehet, daß, wenn 1 ℔ 2 fl. kostet, 2 ℔ nochmal, 3 ℔ 3mal so viel kosten ꝛc.

Man sagt mir entgegen, es seyn aus einem Fasse in Zeit von 2 Minuten 3 Maaß Weins durch den Hahn oder Zapfen heraus gelauffen, ich soll nun bestimmen, wie viel in Zeit von 4 Minuten würde herausgelaufen seyn, so könnte ich mich hier der Regel Detri nicht bedienen, dieweil, je länger der Wein aus dem Fasse läuft, je langsamer läuft er, und steht mithin das ausgelaufene mit der Zeit, die es im auslaufen verwendet, nicht in gleicher Proportion.

Es muß sich demnach ein Anfänger in Anwendnng dieser Regel nicht übereilen, und zuvor wohl untersuchen, ob in der vorkommenden Aufgabe die Dinge, die er berechnen soll, in gleicher Proportion untereinander stehen.

144. Die ältern Arithmetiker haben diese Regel Detri in verschiedne Gattungen getheilet, und jeder ihren besondern Nahmen gegeben. Sie heissen: *regula simplex* die einfache, und *composita* die zusammgesetzte. *directa* die ordentliche, und *inversa* die verkehrte, *regula Societatis* die Gesellschafts-Rechnung, *allegationis* die Vermischungs-Rechnung, *regula falsi simplicis*, und *duplicis positionis*, wenn nämlich die wahre Zahl durch eine willkührlich angenommene gefunden wird 2c. 2c.

Wir werden aber bald sehen, daß alle diese auf eines hinauslaufen, und wir so vieler Gattungen und Nähmen nicht nöthig haben.

2. §.

Verschiedne Anwendungen der Regel Detri in Beyspielen, oder etwelchen Aufgaben.

145. I. Aufgabe. 7. Blätter in einem Buche zu lesen, habe ich 3 Stunden nöthig: wie viel Stunden hab ich nöthig, um 360 Blätter zu lesen?

Aufl. 1. Setze die Zahlen, die von gleicher Art sind, 7 Blätter, und 360 Blätter von Anfang: an das dritte Ort aber die Zahl (3) die in Ansehung der zwo vorigen von ungleicher

Art ist, weil sie ja nicht Blätter, sondern Stunden bedeutet.

2. Weil ich 360 Blätter zu lesen mehr Zeit nöthig habe, als nur 7 Blätter zu lesen, muß das vierte Glied der Proportion grösser werden, als das dritte, folglich muß auch das zweyte größer seyn, als das erste, und wird also unsre Proportion so aussehen müssen:

Blätter		Blätter		Stund
7	:	360	=	3 :

Wenn wir nun, nach der n. 141. angebrachten Regel die vierte Proportionalzahl suchen, werden wir finden $7 : 360 = 3 : 154\frac{2}{7}$

146. II. **Aufgabe.** Als der Metzen Korn 1 fl. 36 x galt, hielt für einen Kreuzer Brod 12 Loth am Gewichte. Nun gilt der Metzen Korn 3 fl. wie schwer soll für einen Kreuzer Brod seyn?

Anmerkung. Hier würde sich ein Rechenmeister der verkehrten Regel bedienen, weil, wie der Werth des Korns zunimmt, so das Gewichte des Brods abnehmen muß. Allein, wenn wir nur unsre Ordnung in Anschreibung der Proportion beybehalten, und nach der vorhergehenden Aufgabe die Zahlen von gleicher Art vom Anfang so setzen, wie es die Aufgabe fordert, die von ungleicher Art aber am dritten Platze, so können wir der verkehrten Regel ohne weiters entbehren.

Aufl.

Aufl. fl x Loth.

$3 : 1.\ 36 = 12 :$ das ist, wenn wir die Gulden zu Kreuzer machen

Kr. Kr. Loth

$180 : 96 = 12 : 6\frac{72}{180} = 6\frac{2}{5}$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 192 \\ 96 \\ \hline 1152 \\ 180 \\ 1080 \\ \hline 72 \end{array}$$

147. **Aufgabe.** 3000 fl. tragen innerhalb 3 Jahren ein Interesse oder Zins von 450 fl. wie viel Zins tragen 25000 fl. innerhalb 13 Jahren?

Die Aufgabe lässet sich auf zweyerley Art auflösen. I. durch Wiederholung der Regel Detri, oder II. durch eine einzele Anwendung derselben, welche Auflösung eigentlich die *regula composita* heisset.

Erste Auflösung. Durch wiederholte Anwendung der gemeinen Regel Detri.

1. Zu was immer für zwo gegebenen Zahlen von gleicher Art, und zur gegebenen dritten von ungleicher Art suche die vierte Proportionalzahl.

Z. B.

	Jahr.		Jahr.		Zins.		Zins.
z. B.	3	:	13	=	450	:	1950

450

650

52

21
5850
3333

2. Zu den noch übrigen zwo gegebenen Zahlen, nämlich zu 3000 und 25000, und zu der in der ersten Operation gefundenen Zahl suche wieder die vierte Proportionalzahl, so ist die Aufgabe aufgelöset.

Nämlich 3000 : 25000 = 1950 : 16250

195 0

1250000

225

25

1 1
4875000
333300

Es tragen also 25000 fl. in 13 Jahren Zins 16250 fl.

Zweyte Auflösung. Durch eine einzele Anwendung der Regel Detri.

Weil dreymal 3000 fl. das ist, 9000 fl. in einem Jahr eben so viel Zins tragen, als einmal

einmal 3000 in 3 Jahren: weil wiederum dreyzehenmal 25000 fl. oder 325000 fl. in einem Jahr den nämlichen Zins tragen, den einmal 25000 fl. in 13 Jahren tragen: lasset man die Jahre gar weg, und sagt dafür:

fl.		fl.		Zins.		Zins.
9000	:	325000	=	450	:	16250

```
      45   0
  ──────────────
  16250000
  1300
─────────────────────────
     874
  1462500000
  99999000
```

148. Aufgabe. Drey Kaufleute schiessen eine Summe Gelds von 11200 fl. zusamm.

Der Erste giebt 3500
Der Andere ⸗ 4900 fl.
Der Dritte ⸗ 2800

über eine Zeit ist ihr ganzer Gewinn 7000 fl.

Nun fragt sich, wie viel jedem insonderheit davon gebührt?

Anmerkung. Die Anwendung der Regel detri, womit diese Aufgabe muß aufgelößt werden, heisset *Regula Societatis*, die Gesellschaftsrechnung.

Aufl. Sprich: Wie sich die ganze zusamm geschossene Summe zum Theile eines jeden insonderheit verhält, so verhält sich der ganze Gewinn zum Gewinne eines jeden insonderheit.

Es muß also die Anwendung der Regel Detri so oft wiederholt werden, so viel ihrer sind, die etwas zur Summe beygetragen. Hier ist die Rechnung.

I. 11200 : 3500 = 7000 : 2187 $\frac{56}{112}$ der Gewinn des erstern.

```
        7 000
     --------
     24500000
     112   00
     224
     ----
      210
      112
      ----
       980
       112
       896
       ----
        840
        112
        784
        ----
         56
```

II. 11200 : 4900 = 7000 : 3062 $\frac{56}{112}$ — des Zweyten.

```
        7000
     --------
     34300000
     112   00
     336
     ----
      700
      112
      672
      ----
       280
       112
       224
       ----
        56
```

III.

III. 11200 : 2800 = 7000 : 1750 Gewinn des Dritten.

```
    7000
19600000
112   00
 840
 112
 784
  560
  112
  560
  000
```

149. **Aufgabe.** Sieben Kinder sollen eine Erbschafft von 36457 fl. in gleiche Theile untereinander theilen.

Wenn wir nun diese Masse 36457 durch 7 theilen, kömmt für jeden der Quotient 5208 fl. $\frac{1}{7}$ heraus. Es wird aber der Gulden nicht in 7, sondern in 60 Theile, die wir Kreuzer nennen, getheilet; wir müssen also diese Fraction ($\frac{1}{7}$) in Theilen eines Guldens bestimmen, wozu wir uns wieder der Regel Detri bedienen können.

Aufl. Man suche zum Nenner (7) der gegebenen Fraction ($\frac{1}{7}$) zu ihrem Zähler (1) und zum Nenner (60) einer andern Fraction, die wir suchen, und die der gegebenen am Werthe gleich ist, die vierte Proportionalzahl, die wird der Zähler der gesuchten Fraction seyn, welche

für

für ihren Nenner 60 haben, und der gegebenen gleich seyn wird. Hier steht die Rechnung.

$$7 : 1 = 60 : 8\tfrac{4}{7}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 7 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

Wir haben also statt $\frac{1}{7}$ eines Guldens $\frac{8}{60}$, das ist, 8 Kreuzer gefunden, die dem siebenden Theil eines Guldens fast gleich sind. Ich sage, fast gleich; denn um den siebenden Theil eines Guldens zu haben, müssen wir zu den 8 Kreuzern noch ($\frac{4}{7}$) viermal den siebenden Theil eines Kreuzers addiren. Es wird aber der Kreuzer nicht in sieben Theile, sondern in acht, die wir Heller nennen, getheilt. So nehmen wir die vorige Regel nochmal her, und setzen

$$7 : 4 = 8 : 4 + \tfrac{4}{7}$$

$$\begin{array}{r} \underline{8} \\ 32 \\ 7 \\ \underline{28} \\ 4 \end{array}$$

Kömmt also für $\frac{1}{7}$ eines Guldens 8 Kreuzer und 4 Heller heraus. Die noch übrigen $\frac{4}{7}$ eines Hellers, weil der Heller schon die kleinste Münze

 ist,

ist, die wir haben, läßt man in den gemeinen Rechnungen weg.

150. **Anmerk.** Weil wir in unsern gemeinen Rechnungen gar selten einen Quotienten ohne Bruche erhalten, habe ich diese Anwendung der Regel Detri nicht weglassen wollen, ob ich schon den Beweis davon hier nicht leicht so anbringen kann, daß ihn ein Anfänger begreift, der in den Lehrsätzen von den Proportionen noch nicht geübt ist. Er gründet sich auf den Lehrsatz, daß Brüche von gleicher Art einander gleich sind, wenn ihre Zähler zu den Nennern oder diese zu jenen das nämliche Verhältniß haben.

151. Weil die Multiplication sowohl als die Division weit leichter mit kleinen, als mit größeru Zahlen vorgenommen wird, kann man sich gar oft die Anwendung der Regel Detri leichter machen, so oft sich nämlich in der angeschriebenen Proportion das erste und zweyte, oder das erste und dritte Glied durch die nämliche Zahl genau dividiren läßt, da man die Quotienten am Platz der vorigen Glieder setzt.

Beyspiele davon in etwelchen Aufgaben.

Aufgabe. Etwelche Schnitter schneiden innerhalb 4 Tagen 12 Morgen, wie viel Tage werden sie nöthig haben, um 20 Morgen zu schneiden?

Der

Der gemeinen Regel nach würde die Proportion so angeschrieben $4 : 20 = 12 : x$

Wenn ich aber das erste und zweyte Glied durch 4 dividire, bekomme ich $1 : 5 = 12 : x$

Dividire ich aber das Ite und IIIte, bekomme ich $1 : 20 = 3 : x$

und wird überall die gesuchte Zahl $x = 60$ seyn.

Aufgabe. 36. Ellen Tuches kosten 63 fl. wie viel kosten 48 Ellen des nämlichen Tuches?

Das ist : $36 : 48 = 63 : x$

dividire ich nun das Ite und IIte Glied durch 12, so bekomme ich $3 : 4 = 63 : x$

dividire ich aber das Ite und IIIte Glied durch 9, so hab ich : $4 : 48 = 7 : x$

und wird jederzeit die gesuchte Zahl $= 84$ seyn.

Aufgabe. 100 fl. tragen jährlich 5 fl. Zins, wie viel Zins werden 36240 fl. tragen?

Das ist : $100 : 36240 = 5 : x$

dividire ich aber das Ite und IIIte Glied durch 5, bekomme ich $20 : 36240 = 1 : x$

dividire ich das Ite und IIte davon wieder durch 10, so bekomm ich $2 : 3624 = 1 : x$

und wird die gesuchte Zahl $= 1812$ seyn.

152. **Anmerkung.** Wenn ein Anfänger die Auflösung dieser letzten Aufgabe nur ein wenig betrachten will, kann er sich eine sehr vortheilhafte Rechnungsart herausnehmen, um den Jahrszins (5 pro 100) für jedes gegebene Capital, so zu sagen, im Augenblicke zu bestimmen. Nämlich von der gegebenen Summe des Capitals trennt man rechter Hand die äusserste Zahl ab, und dividirt die vorhergehenden durch 2. Der Quotient giebt die Gulden, die abgetrennte Zahl aber die Groschen des jährlichen Zinses. Z. B. Es sey das Capital = 5934|7. man giebt jährlich 5 pro Cent. so ist der Jahrszins $= \frac{5934}{2} = 2967$ fl. + 7 Groschen oder 21 Kr. Bleibt aber im Quotienten ein Rest, so wird dieser zur Zahl der Groschen gezählet. Z. B. Es sey das Capital = 78935|4. so ist der Jahrszins $= \frac{78935}{2} = 39467$ bleibt 1 im Rest: dieß zu 4 gezählt, giebt 5 Groschen.

153. Wenn uns das Verhältniß bekannt ist, welches die Werthe verschiedner Waaren von ungleicher Gattung in einem gewissen Maaße gegeneinander haben, können wir den Werth derselben auf was immer für ein anderes Maaß durch die Regel Detri reduciren.

Es verhalte sich z. B. der Werth eines Schäfels Haber zum Werthe eines Schäfels Gersten wie 2 zu 3. und ich soll 8 Schäfel Gersten, die ich meinem Nachbarn schuldig bin, mit

Haber

Haber bezahlen. Nun fragt sich, wie viel ich ihm Schåfel Haber geben můsse, um die Schuld von 8 Schåfel Gersten zu tilgen. So ist die Anwendung der Regel Detri folgende:

2 : 3 = 8 : 12

oder 2 : 8 = 3 : 12

Denn weil sich der Werth des Schåfels Haber zum Werthe eines Schåfels Gersten wie 2 zu 3 verhålt, und folglich 2 Schåfel Haber 3 Schåfeln Gersten am Werthe gleich kommen, so kommen 8 Schåfeln Gersten 12 Schåfel Haber gleich. Oder: 2 Schåfel Gersten sind eben so oft in 8 Schåfeln Gersten, als 3 Schåfel Haber in 12 Schåfeln Haber enthalten.

154. Anmerk. Es giebt noch eine Menge der bequemsten Vortheile, diese und tausend andere dergleichen Aufgaben behende aufzulösen, die eben wieder vom P. Philipp Steinmeyer in seinem tirocinio arithmetico weitlåufig und deutlich abgehandelt, den Schůlern aber, die etwas mehr Fåhigkeit besitzen, privat kŏnnen erklåret werden. Von Anwendung der Regel Detri in hŏhern Aufgaben, oder in gebrochenen Zahlen zu handeln schien es mir hier nicht rathsam zu seyn; das Bůchgen wůrde fůr seine Absicht zu weitlåufig werden; und fůr Schůler, die neben der Arithmetick noch einen Haufen andere Dinge lernen můssen, kann diese kurze Anleitung schon hinreichend seyn, (besonders wo die můndliche Erklårungen der Lehrmeister den Mangel der Weitlåuftigkeit des Schulbůchgens ersetzen,)

setzen,) sie geschickt zu machen, auch die höhern Aufgaben mit der Zeit aufzulösen, so bald sie sich in der Algebra (wo es mit halber Arbeit geschieht) und hauptsächlich in den Proportionen werden geübt haben. Nur will ich noch etwelche Aufgaben samt ihrer Auflösung ohne Rechnung hersetzen, worinn sich ein Anfänger nach den vorhergehenden Lehrsätzen selbst üben könne.

155. I. **Aufgabe.** 12 Brode werden für 2 fl. verkauft: wie viel bekomme ich Brode für 8 fl. **Antw.** 48.

II. 48. Brode kosten 8 fl. Was kosten 12 Brode? **Antw.** 2 fl.

Anmerkung. Diese Abänderung der Aufgabe lehret, wie ein Anfänger die Anwendung seiner Regel Detri prüfen könne.

III. 30 Bauleute verfertigen ein Garten-Haus in 9 Tagen. Wie lang würden 70. Bauleute damit zu thun haben? **Antw.** 3 Tage, 10 Stunde und $\frac{2}{7}$ oder ein bischen mehr, als eine Viertelstund.

IV. Bey gutem Schießpulver gehören auf 1 ℔ Pulvers 32 Loth Salpeter, 6 Loth Kohlen, und 4 Loth Schwefel, wie viel gehört von jeder Gattung zu 1000 ℔?

Antw. $761\frac{19}{21}$ Salpeter. $142\frac{6}{7}$ Kohlen. $95\frac{5}{21}$ Schwefel.

V.

V. 20 Bauleute haben in einem Tage 45 Klafter gebaut, man soll den folgenden Tag mit 81 Klaftern fertig werden. Wie viel muß man Bauleute haben? Antw. 36.

VI. 20 Bauleute haben in 15 Tagen 160 Klafter gebaut; wie viel Klafter werden 30 Bauleute in 12 Tagen bauen? Antw. 192.

Anhang.

Von den ersten Arithmetischen Operationen der Algebra.

1. §.

Vorläufige Erklärungen.

1. Die Algebra, welche eine Wissenschaft ist, aus bekannten Größen unbekannte zu finden, ist eigentlich nichts anders, als eine Arithmetick, welche aber, weil sie sich statt der bestimmten Zahlen der unbestimmten Buchstaben des a, b, c bedienet, zu einer Universalarithmetick wird, durch die wir allgemeine Regeln finden, eine unendliche Menge Aufgaben, die aus dem nämlichen Fache sind, auf einmal damit aufzulösen.

2. Eine Algebraische Größe wird genennt alles das, was sich vermehren, oder vermindern lässet.

3. Zwo Gattungen der Größen giebt es in der Allgebra. Die erste wird (quantitas positiva) eine wirkliche Größe, die vorhanden ist; die andere (negativa) ein Mangel, oder eine abgehende Größe (z. B. eine Schuld) genennt. Beyde werden durch das vorangesetzte Zeichen unterschieden. Die wirkliche Größe wird durch †, der Mangel aber durch — angedeutet. Jenes wird *signum positivum*, dieß *signum negativum* genennet.

3. Die übrigen Zeichen der Addition, der Subtraction, der Multiplication, der Division, und der Gleichheit sind die nämlichen, wie wir sie oben in der gemeinen Arithmetick erkläret haben. Wenn bey einer Größe gar kein Zeichen voraus steht, ist sie jederzeit eine wirkliche Größe, die das Zeichen † vor sich hat, welches man am Anfange einer Summe oder eines Products wegzulassen pflegt.

2. §.

Vom Addiren und Subtrahiren.

4. Aufgabe. Unbestimmte Größen addiren.

Aufl. Man merke diese einzige Regel: Wenn die Zeichen der Größen, die man addiren soll, gleich, oder die nämlichen sind, addirt man wie in den gemeinen Zahlen.

Z. B.

Z. B. Ich soll zu	6a	+	5b	—	7c
addiren	4a	+	3b	—	2c
So ist die Summe	10a	+	8b	—	9c

Sind aber die Zeichen ungleich, so verändert man die Addition in die Subtraction; das ist, man zieht das kleinere vom grössern ab, und setzt dasjenige Zeichen voraus, welches bey der größern Quantität gestanden.

Z. B. Ich soll zu		6a	+	3b	—	7c
addiren	—	7a	—	5b	+	3c
So ist die Summe =	—	a	—	2b	—	4c

Sind endlich auch die Buchstaben einander ungleich, schreibt man sie samt ihren Zeichen ohne weiters aneinander hin.

5. Aufgabe. Unbestimmte Größen voneinander subtrahiren.

Aufl. Man merke die einzige Regel: Alle Zeichen derjenigen Größen, die du von andern abziehen sollst, verändere, und setze die entgegen gesetzte dafür hin, das ist: wo das Zeichen + stehet, schreib — und wo — steht, schreib +, wenn dieß geschehen, addire die Größen **nach der vorhergehenden Regel**, so ist die Subtraction vollbracht.

 Z. B.

Z. B. Ich soll von $9b + 15c - 7d + 8e - f$

subtrahiren $6b + 20c - 9d - 9e + 7f$

So muß ich zu $9b + 15c - 7d + 8e - f$

nach geänderten Zeichen addiren $-6b - 20c + 9d + 9e - 7f$

Ist also die Differenz $= 3b - 5c + 2d + 17e - 8f.$

3. §. Vom Multipliciren und Dividiren.

6. Aufgabe. Unbestimmte Größen durcheinander multipliciren.

Aufl. Man merke die einzige Regel: Wenn beede Efficienten, oder Factoren das nämliche Zeichen haben, (es sey + oder —) setzt man jederzeit dem Producte das Zeichen + vor. Haben sie aber verschiedne Zeichen vor sich, wird dem Producte das Zeichen — vorgesetzt. Im übrigen geschieht die Multiplication so, wie bey den gemeinen Zahlen.

Z. B. Ich soll multipliciren $3a + 2b - d$

durch $2a - b$

$- 3ab - 2bb + bd$

$6aa + 4ab - 2ad$

So ist die Summe oder das Product

$= 6aa + 4ab - 3ab - 2ad - 2bb + bd$

oder kürzer $= 6aa + ab - 2ad - 2bb + bd.$

Wenn

Wenn man nur einfache Größen multiplicirt, schreibt man sie gleich so ohne Zeichen aneinander hin, so heisset a b so viel als a multiplicirt durch b. Wiederum 3 a multiplicirt durch 4 b ist = 12 ab.

Ist aber die einte, oder sind alle beyden aus mehrern zusammgesetzte Größen, schreibt mans so: $(a + b) \times a$, oder $(a + b)\, a$. Wiederum $(a + b) \times (a - b)$ oder $(a + b).(a - b)$, oder endlich $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$.

7. Aufgabe. Unbestimmte Größen dividiren.

Aufl. Man merke, wie bey der Multiplication, die einzige Regel: **Wenn die zwo Größen, die ich durcheinander dividiren soll, einerley Zeichen vor sich haben, setzt man jederzeit dem Quotienten das Zeichen + vor; haben sie aber verschiedne Zeichen, so wird dem Quotienten das Zeichen — vorgesetzt.** Im übrigen verfährt man mit der Division wie bey den gemeinen Zahlen.

Ehe ich ein Beyspiel von der Division gebe, muß ich den Anfänger eines Lehrsatzes erinnern, den ich in meiner Abhandlung von der Allgebra §. 105. deutlich erwiesen, er aber indessen gleichwohl für erwiesen annehmen muß. Er heisset so:

Lehr-

Lehrsatz. Wenn man was immer für ein Product (ab) durch einen aus den Factoren dividirt, wird der Quotient jederzeit der andere Factor seyn.

So ist z. B. $\frac{ab}{a} = b$ und $\frac{ab}{b} = a$.

Dieß begreiflicher zu machen, wollen wir für die Buchstaben a und b zwo Zahlen hersetzen. a soll 3, b soll 4 bedeuten. so ist

$$ab = 3 \times 4 = 12.$$

Dahero $\frac{ab}{a} = \frac{3 \times 4}{3} = \frac{12}{3} = 4 = b$

und $\frac{ab}{b} = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4} = 3 = a$.

Man sieht aus diesem Beyspiele leicht, daß um ein Product durch einen aus den Factoren zu dividiren mehr nicht nöthig sey, als die gleichen Größen (sie seyn Zahlen oder Buchstaben) beyderseits auslöschen; die Größe, der ich im Theiler keine Gleiche finde, ist der Quotient. So ist z. B. $\frac{abc}{b} = ac$.

Stünde aber b oben, und abc unten als der Theiler, so: $\frac{b}{abc}$, so lässet sichs nicht dividiren, sondern ist ein Bruch, (von denen

denen wir gleich handeln werden,) welcher, weil $\frac{b}{b} = 1$ in diesen verändert wird $\frac{1}{ac}$.

Jetzt wollen wir ein Exempel der Division vor uns nehmen.

Es ist $(a + b) \times (a - b) = aa - bb$. Wenn wir dahero dieß Product $aa - bb$ durch $a + b$ dividiren, muß der Quotient $a - b$ heissen. Dividiren wir es aber durch $a - b$, so wird der Quotient $a + b$ seyn. Die Rechnung siehet ohngefähr so aus.

der Divisor $a + b$) $aa - bb$) $a - b$ der Quotient

$$\begin{array}{r} aa + ab \\ \hline -ab - bb \\ -ab - bb \\ \hline 0 \end{array}$$

Nur dieß habe ich noch von der Division zu erinnern, daß, wenn ein Rest herauskömmt, der sich nicht mehr dividiren läßt, man die Division nur anzeige, und wie eine Fraction schreibe. Z. B. $\frac{a + b}{c + d}$.

Wenn man einfache Größen dividirt, z. B. a dividirt durch b, schreibt man $\frac{a}{b}$, oder $a : b$.

Ist aber die Einte, oder beyde zusammgesetzte Größen, schreibt mans so: $(a + b) : c$. das ist,

die

die Summe von $a + b$ dividirt durch c. oder $\frac{a+b}{c}$.

Eben so heisset $(a+b) : (c-d)$ oder $\frac{a+b}{c-d}$ die Summe von $a+b$ dividirt durch $c-d$.

3. §.

Von den Fractionen.

8. Mit den Fractionen verfährt man in der Algebra wie in der gemeinen Zahlrechnung. Die Operationen sind die nämlichen, und bleibt alles bey den bekannten Regeln der Arithmetick, die ich oben im 5ten Abschnitt, §. 2. erkläret. Es wird also hinlänglich seyn, wenn ich nur von jeder Operation ein Beyspiel hersetze.

I. Man soll folgende Fractionen unter den nämlichen Nenner bringen. $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ so kömmt heraus $\frac{bc}{ac}, \frac{ad}{ac}$ oder diese, $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{f}{e}$, so bekömmt man $\frac{bce}{ace}, \frac{ade}{ace}, \frac{acf}{ace}$.

II. Man soll folgende Brüche kleiner machen, ohne ihren Werth zu verändern: $\frac{bce}{ace}, \frac{ade}{ace}$ rc. so bekömmt man $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ rc.

Man

Man darf nämlich nur oben im Zähler, und unten im Nenner die gleichen Buchstaben weglassen, so ists geschehen.

III. Man soll folgende Brüche **addiren**: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, so bekömmt man $\frac{ad + bc}{bd}$

IV. Man soll sie voneinander **subtrahiren**: so bekömmt man $\frac{ad - bc}{bd}$

V. Man soll folgende Fractionen **multipliciren**: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ so bekömmt man $\frac{ac}{bd}$.

VI. Man soll die Fraction $\frac{a}{b}$ durch c multipliciren: so bekömmt man $\frac{ac}{b}$.

VII. Man soll sie durch c dividiren: so bekömmt man $\frac{a}{bc}$.

VIII. Man soll die Fraction $\frac{a}{b}$ durch ein andere Fraction $\frac{c}{d}$ dividiren, so bekömmt man $\frac{ad}{bc}$.

IX. Man soll eine gegebene Größe m in eine Fraction verkehren, die der gegebenen

Größe

Größe m gleich ist, und n für ihren Nenner habe, so bekömmt man $\frac{mn}{n} = m$.

9. **Anmerkung.** Ich habe diesen kurzen Anhang von den ersten arithmetischrn Operationen fast von Wort zu Wort aus meiner Abhandlung von den Gründen der Algebra rc. nur denen zu lieb hieher zu schreiben mich entschlossen, welche etwann schon in den untern Schulen Lust haben sich in der Buchstabenrechnuug ein wenig zu üben. Und ich bin versicheret, sie werden in diesen ersten Operationen nicht die mindeste Beschwerniß finden, wenn sie sich nur zuvor alles das, was ich von der gemeinen Arithmetick in diesem Werkgen gelehret, durch tausend Uebungen werden bekannt gemacht haben.

Errata.

Pag. 36. lin. 2. nach den Worten multiplicire man, setze hinzu: von der rechten zur linken.

Pag. 39. lin. 2. ließ $\frac{9}{3}$.

Pag. 43. in der allerersten Zeile statt Algebra abgehandelt, ließ Algebra ausführlicher abgehandelt.

Pag. 44. lin. 21. statt Nenner, ließ Zähler.

Pag. 45. lin. 28. statt Seiten, ließ Seite.

Pag. 46. lin. 16. statt Nenner, ließ Zähler.

Pag. 47. lin. 16. statt Ganz ns, ließ Ganzens.

Bayerische Staatsbibliothek München

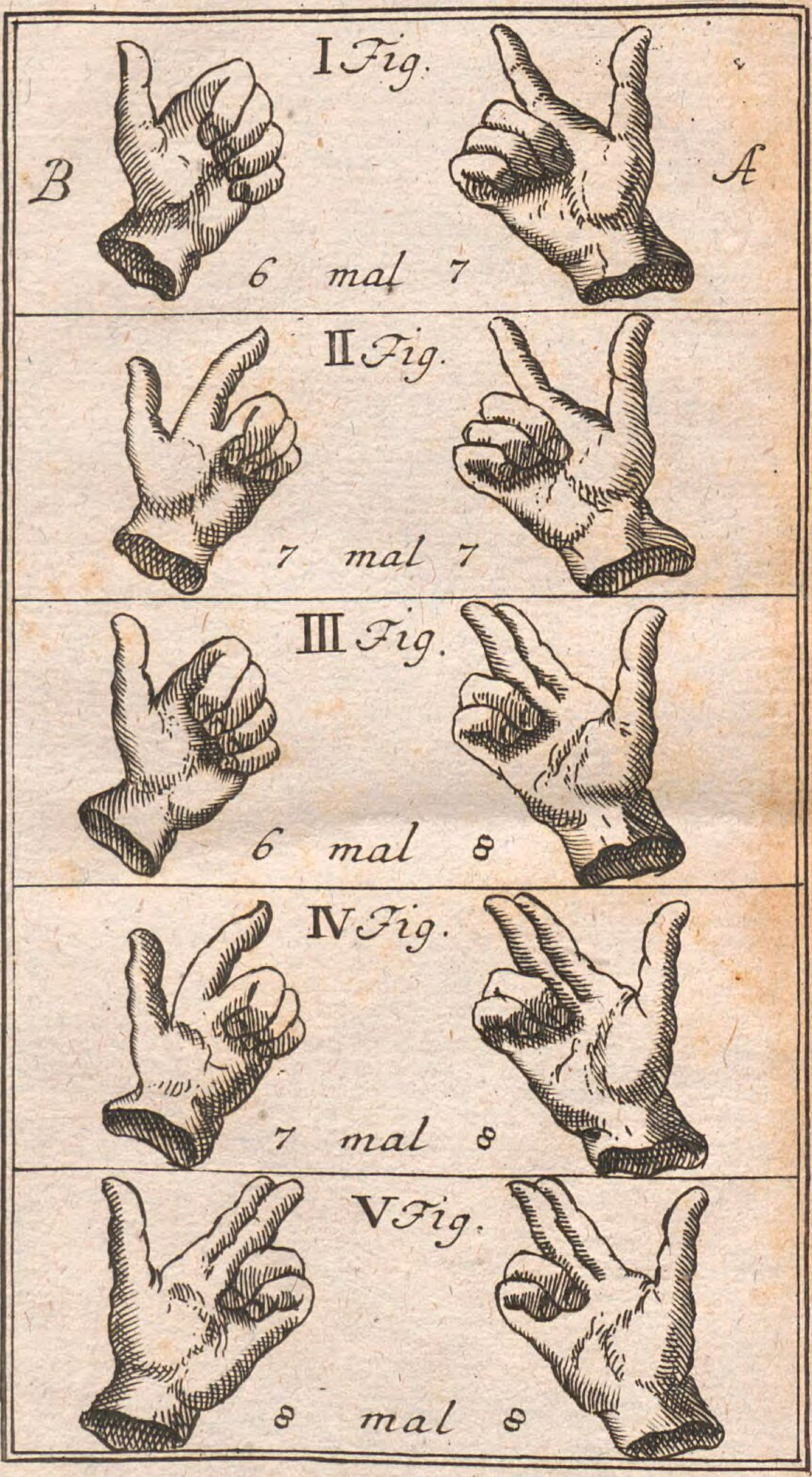
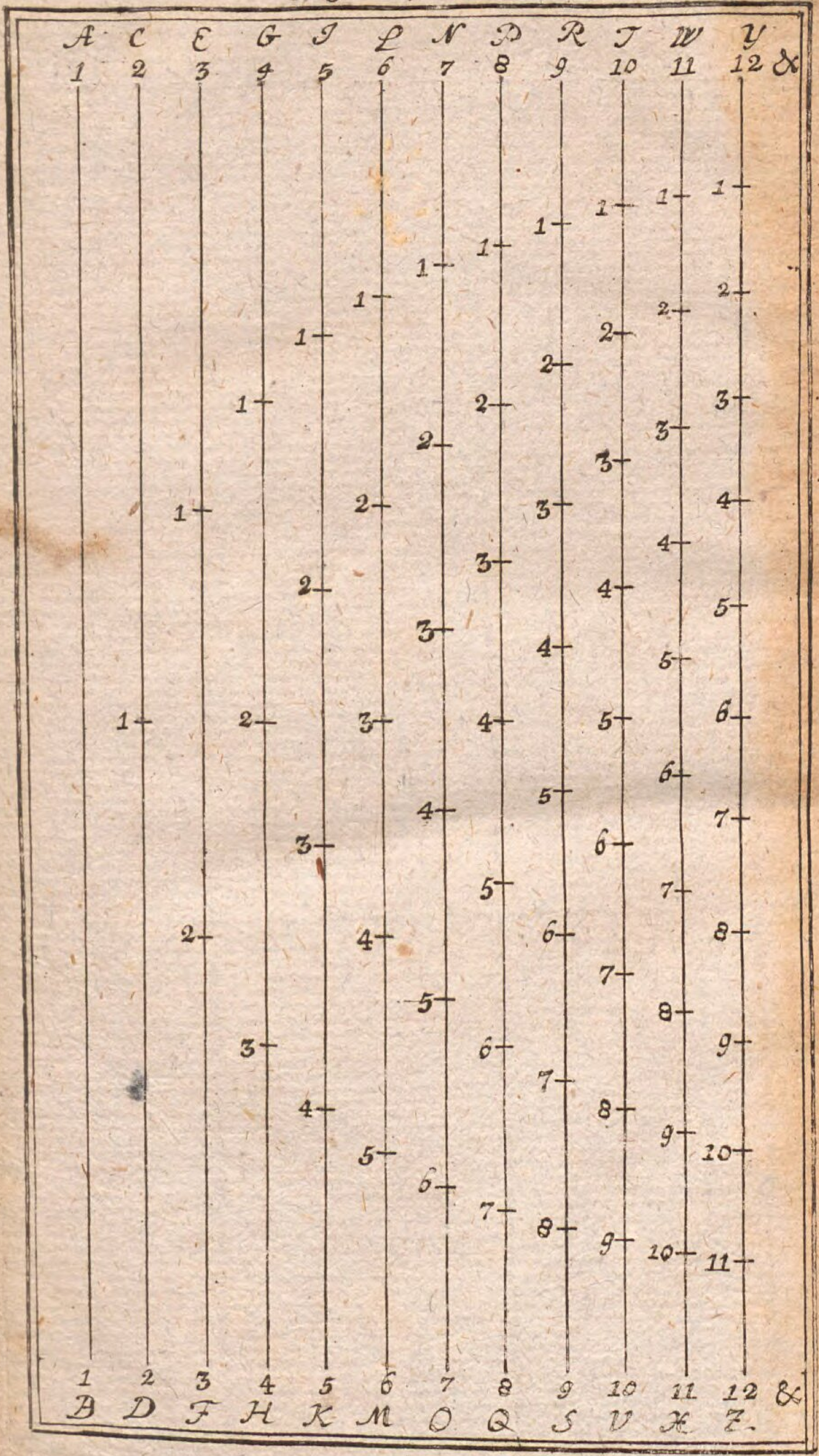

I Fig.
B
A
6 mal 7
II Fig.
7 mal 7
III Fig.
6 mal 8
IV Fig.
7 mal 8
V Fig.
8 mal 8

Fig. VI.


A C E G I L N P R T W Y
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 &
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 &
B D F H K M O Q S V X Z.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Barth, Anton <<von>>,

Kurze Anleitung zur Rechenkunst

München 1772

Math.p. 24
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081419-2
VD18 12015946